

Simulation von Kondensations- und Koaleszenzprozessen in Wolken

Diplomarbeit
von
Catrin Lehmann

MATHEMATISCH - NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT DER
CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
ERSTELLT AM LEIBNIZ - INSTITUT FÜR MEERESWISSENSCHAFTEN
FORSCHUNGSBEREICH 1
- MARITIME METEOROLOGIE -



Kiel, Juli 2005

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	I
1 Einleitung	1
2 Wolken und Niederschlag	5
3 Tropfenwachstum durch Kondensation	9
3.1 Theorie	9
3.1.1 Bildung von Wolkenpartikeln	9
3.1.2 Wachstum von Wolkenpartikeln	13
3.2 Umsetzung im Modell	14
3.3 Auswertung	17
3.3.1 Entwicklung eines einzelnen Tropfens	17
3.3.2 Entwicklung eines Tropfenensembles	19
3.3.3 Variation der Umgebungsparameter	22
4 Tropfenwachstum durch Koaleszenz	33
4.1 kontinuierliches Koagulationsmodell	33
4.1.1 Theorie	33
4.1.2 Auswertung	36
4.1.2.1 Entwicklung eines einzelnen Tropfens	36
4.1.2.2 Entwicklung eines Tropfenensembles	38
4.2 stochastisches Koaleszenzmodell	39
4.2.1 Theorie	39
4.2.1.1 Numerische Lösung der stochastischen Koaleszenzgleichung	40
4.2.1.2 Monte-Carlo Lösung der stochastischen Koaleszenzgleichung	40
4.2.2 Auswertung	44
4.2.2.1 Lösung der stochastischen Koaleszenzgleichung durch numerische Integration	44
4.2.2.2 Lösung der stochastischen Koaleszenzgleichung mit der Monte-Carlo Methode	50

5	Tropfenwachstum durch Kondensation und Koaleszenz	53
5.1	Variation der Umgebungsbedingungen	56
6	Schlussbetrachtung	63
	Literatur	67
	Erklärung	71

Abbildungsverzeichnis

2.1	Lebenszyklus eines Wolkentropfens	7
3.1	Veranschaulichung Oberflächenspannung	9
3.2	Köhler-Kurve	12
3.3	Radiosondenaufstieg vom 2.10.1987	16
3.4	gemessene Tropfengrößenverteilung 1997 über Kamenz	17
3.5	Tropfenwachstum für $S = 1.01$	18
3.6	Tropfenwachstum für $S = 0.99$	18
3.7	Tropfenwachstum einer kompletten Tropfenpopulation für unterschiedliche Übersättigungen	19
3.8	Entwicklung der Tropfenspektren für eine gemessene Verteilung	21
3.9	Entwicklung der Tropfenspektren für eine konstante Verteilung	21
3.10	Ausschnitt aus dem Radiosondenaufstieg (Abbildung 3.3) für den relevanten Höhenbereich, roter Bereich gibt das Intervall der Verrauschung an	22
3.11	zeitlicher Verlauf der Tropfeneigenschaften bei einer Variation der Umgebungstemperatur um ± 2 K	23
3.12	Entwicklung der Tropfenspektren für eine Variation der Temperatur um ± 2 K und invers die Entwicklung der Tropfenspektren unter Normalbedingungen	24
3.13	zeitlicher Verlauf der Tropfeneigenschaften bei einer Variation der spezifischen Feuchte um $\pm 1 \frac{g}{kg}$	25
3.14	Entwicklung der Tropfenspektren für eine Variation der spezifischen Feuchte um $\pm 1 \frac{g}{kg}$ und invers die Entwicklung der Tropfenspektren unter Normalbedingungen	25
3.15	zeitlicher Verlauf der Differenz der Tropfeneigenschaften zwischen Normalzustand und verrauschtem Zustand (Variation der spezifischen Feuchte um $\pm 1 \frac{g}{kg}$)	26
3.16	zeitlicher Verlauf der Tropfeneigenschaften bei einer Variation des Aufwindes um $\pm 1 \frac{m}{s}$	27
3.17	Entwicklung der Tropfenspektren für eine Variation des Aufwindes um $\pm 1 \frac{m}{s}$ und invers die Entwicklung der Tropfenspektren unter Normalbedingungen	27

3.18	zeitlicher Verlauf der Tropfeneigenschaften bei einer Variation der Temperatur um ± 2 K, der spezifischen Feuchte um $\pm 1 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$ und des Aufwindes um $\pm 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	28
3.19	Entwicklung der Tropfenspektren für eine Variation der Temperatur um ± 2 K, der spezifischen Feuchte um $\pm 1 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$ und des Aufwindes um $\pm 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und invers die Entwicklung der Tropfenspektren unter Normalbedingungen	28
3.20	Verhalten des Diffusionswachstums als Funktion der Temperatur	30
3.21	Verhalten des Diffusionswachstums als Funktion der spezifischen Feuchte	30
3.22	zeitlicher Verlauf der Tropfeneigenschaften bei einer Variation der Temperatur um ± 2 K mittels AR(1)-Prozess auf den Rauscheinfluss	31
3.23	Entwicklung der Tropfenspektren für eine Variation der Temperatur um ± 2 K mittels AR(1)-Prozess auf den Rauscheinfluss	32
4.1	Tropfeneinfang durch Kollision (aus Maxerath (1984))	35
4.2	Tropfenwachstum durch Koagulation, links: Werte nach Gleichung 4.9, rechts: Werte aus Tabelle 4.1 für Kollisionseffizienz	37
4.3	Tropfenwachstum einer kompletten Tropfenpopulation durch Koagulation, links: Werte nach Gleichung 4.9, rechts: Werte aus Tabelle 4.1 für Kollisionseffizienz	38
4.4	Veranschaulichung stochastische Koaleszenzgleichung	39
4.5	Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	43
4.6	Schema des Monte-Carlo Simulations-Algorithmus	43
4.7	zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums anhand der stochastischen Koaleszenzgleichung, E nach Gleichung 4.9, links: Darstellung alle 10 min, rechts: Darstellung alle 30 s	44
4.8	zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums anhand der stochastischen Koaleszenzgleichung, E aus Tabelle 4.1, links: Darstellung alle 10 min, rechts: Darstellung alle 30 s	45
4.9	zeitliche Entwicklung eines bimodalen Tröpfchenspektrums, wobei alle Kollisionen erlaubt sind	46
4.10	zeitliche Entwicklung eines bimodalen Tröpfchenspektrums, wobei nur Kollisionen innerhalb Spektrum 1 erlaubt sind	47
4.11	zeitliche Entwicklung eines bimodalen Tröpfchenspektrums, wobei nur Kollisionen zwischen Spektrum 1 und Spektrum 2 erlaubt sind	48
4.12	zeitliche Entwicklung eines bimodalen Tröpfchenspektrums, wobei nur Kollisionen innerhalb Spektrum 2 erlaubt sind	48
4.13	zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums anhand der stochastischen Koaleszenzgleichung für ein zeitlich variables Tröpfchenspektrum, links: Darstellung jede min, rechts: Darstellung alle 30 s	49
4.14	Initialverteilung für Tropfenwachstum anhand der stochastischen Koaleszenzgleichung mittels der Monte-Carlo Methode	50

4.15	links: zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums anhand der stochastischen Koaleszenzgleichung mittels der Monte-Carlo Methode, rechts: zeitlicher Verlauf der Standardabweichung für jede Größenklasse	51
5.1	zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums durch Koaleszenz und Kondensation	54
5.2	zeitliche Entwicklung des effektiven Radius	55
5.3	zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums durch Koaleszenz und Kondensation, rechts: für ein Anfangsspektrum mit Radien zwischen 22 und 30 μm , links: für ein Anfangsspektrum mit Radien zwischen 29 und 36 μm , Darstellung bei (c) und (d) jeweils alle 10 s	56
5.4	zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums durch Koaleszenz und Kondensation bei einer Variation der Temperatur um $\pm 2 \text{ K}$	57
5.5	zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums durch Koaleszenz und Kondensation bei einer Variation der spezifischen Feuchte um $\pm 1 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$	58
5.6	zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums durch Koaleszenz und Kondensation bei einer Variation des Aufwindes um $\pm 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	59
5.7	zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums durch Koaleszenz und Kondensation bei einer Variation der Temperatur um $\pm 2 \text{ K}$ mittels AR(1)-Prozess auf den Rauscheinfluss	60
5.8	zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums durch Koaleszenz und Kondensation bei einer Variation des Aufwindes um $\pm 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ mittels AR(1)-Prozess auf den Rauscheinfluss	61

Tabellenverzeichnis

3.1	Kritische Radien und Molekülzahlen von reinen Wassertröpfchen als Funktion des Sättigungsverhältnisses (aus Rogers und Yau (1989))	11
4.1	Kollisionseffizienz $E_{\text{koll}}(R, r)$ für Tropfen mit Radius R kollidierend mit Tropfen mit Radius r (aus Rogers und Yau (1989))	36

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die mikrophysikalischen Prozesse innerhalb einer Wolke spektral betrachtet. Zusätzlich wird der Einfluss der Variabilität der Atmosphäre auf das Tropfenwachstum untersucht. Dazu werden den Umgebungsparametern auf verschiedene Art und Weise Störungen überlagert. Den Ausgangspunkt für sämtliche Betrachtungen der zeitlichen Entwicklung bildet ein bereits aktiviertes Tropfenspektrum. Um die Umgebungsbedingungen möglichst realistisch zu halten, wird auf eine gemessene Tropfengrößenverteilung und einen Radiosondenaufstieg zurückgegriffen.

Anhand dieser Vorgaben kann gezeigt werden, dass alleine durch Kondensation größere Tropfen erzeugt werden. Allerdings braucht es dafür eine Übersättigung innerhalb der Atmosphäre. Außerdem erfolgt das Wachstum in diesem Fall auf sehr langen Zeitskalen. Da zusätzlich das komplette Tropfenspektrum deutlich schmaler wird, ist diese Art des Wachstums alleine zur Niederschlagsbildung ungeeignet.

Ein Einfluss auf das Tropfenwachstum wird lediglich durch eine Variabilität der Umgebungstemperatur hervorgerufen. So wird durch leichte Schwankungen in der Umgebungstemperatur das Tropfenwachstum deutlich verlangsamt. Kleine Änderungen in der spezifischen Feuchte und im Aufwind haben keine Auswirkungen auf den Wachstumsprozess.

Innerhalb einer Wolke tritt allerdings auch noch Tropfenwachstum durch Koaleszenz auf. Dabei verschmelzen die großen Tropfen mit den kleineren. Diese Wachstumsform ist von den Umgebungsbedingungen unabhängig, da sie alleine die Wechselwirkungen zwischen zwei Tropfen berücksichtigt. In diesem Fall kommt es sehr schnell zur Bildung sehr großer Tropfen. D.h. die Entstehung von Niederschlag ist somit gewährleistet.

Da in einer realistischen Wolke keine Beschränkung auf eine einzelne Wachstumsform gegeben ist, wurden zum Schluss Kondensations- und Koaleszenzwachstum miteinander kombiniert. Dabei entstehen die großen Tropfen noch einmal auf deutlich kürzeren Zeitskalen. Es erfolgt sehr schnell eine Verlagerung des gesamten Tropfenspektrums zu Tropfen mit größeren Radien. D.h. hier kann Niederschlag entstehen.

Diesmal wird ein starker Einfluss auf das Tropfenwachstum durch eine Variabilität des Aufwindes hervorgerufen. Eine Variation der Umgebungstemperatur erzeugt identische Auswirkungen wie bei reinem Kondensationswachstum und leichte Änderungen in der spezifischen Feuchte zeigen keine Effekte.

Durch die hier untersuchten Prozesse kann das Tropfenwachstum innerhalb einer Wolke gut beschrieben werden.

Kapitel 1

Einleitung

Durch Wolken werden wir täglich direkt oder indirekt beeinflusst, da sie zu einem großen Teil das Wetter bestimmen. Wolken nehmen auch Einfluss auf das Klima, indem sie über die Energiebilanz auf die großräumige Dynamik der Atmosphäre einwirken. Das Freisetzen von Kondensationswärme treibt direkt die atmosphärischen Zirkulationszellen an (z.B. Hadley-Zirkulation), die wieder mit dem Ozean wechselwirken (z.B. ENSO). Wolken wirken also auf das Klimasystem ein, werden aber im Gegenzug durch Klimavariabilität auch von diesem beeinflusst.

Der Wolkenbedeckungsgrad der Erde liegt bei über 60 %. Die wichtigsten Funktionen der Wolken sind die Einstellung des Strahlungsgleichgewichts der Erde und durch Konvektionsprozesse der Transport von Frischwasser und latenter Wärme. Erhöhter Niederschlag führt zu dunkleren Böden und damit verbunden zu einer höheren Absorption solarer Einstrahlung. Bei Schneefall erhöht sich die Bodenalbedo und die Absorption der solaren Einstrahlung geht zurück. Über beide Rückkopplungsmechanismen nimmt der Niederschlag Einfluss auf die Strahlungsbilanz der Erde. Weitere Einflussnahme der Wolken auf die Strahlungsbilanz erfolgt über die Wechselwirkung mit der Strahlung selber. Da sowohl Reflexion kurzwelliger Strahlung in den Weltraum wie auch Absorption langwelliger Strahlung am Boden erfolgt, wird zwischen dem Albedo- und dem Treibhauseffekt unterschieden. Durch den Albedoeffekt (Reflexion solarer Strahlung an Wolken zurück in den Weltraum) erfolgt eine Abkühlung des Systems Erde-Atmosphäre. Beim Treibhauseffekt (Verminderung langwelliger terrestrischer Ausstrahlung durch Absorption) kommt es zu einer Temperaturerhöhung. Welcher Effekt dominiert hängt von der Wolkenhöhe, der Wolkendicke und den Strahlungseigenschaften der Wolke ab. Die Strahlungseigenschaften wiederum ergeben sich aus der Verteilung des Wasserdampfes, der Wolkentropfen und der Eispartikel, sowie den atmosphärischen Aerosolen. Allgemein ist für niedrige, dicke Bewölkung (Cumulusbewölkung) der Albedoeffekt bestimmend, während für hohe, dünne Wolken (Cirrusbewölkung) der Treibhauseffekt überwiegt. Durch Satellitenmessungen ist bekannt, dass Wolken im globalen jährlichen Mittel abkühlend wirken, d.h. der Albedoeffekt überwiegt dem Treibhauseffekt.

Obwohl Wolken für das Klima und sein Verständnis so wichtig sind, ist die Kenntnis ihrer Eigenschaften sehr gering. Um diese zu verbessern, werden verschiedene Untersuchungen durchgeführt. Diese Untersuchungen reichen von theoretischen Arbeiten, die die physikalischen Prozesse beschreiben, bis hin zu experimentellen Messungen von dynamischen und mikrophysikalischen Parametern in realen Wolken. Die Messungen werden vom Boden, von Flugzeugen und auch mit Hilfe von Satelliten durchgeführt. Bei Bodenmessungen werden z.B. RADAR (Radio Detecting and Ranging) oder LIDAR (Light Detecting and Ranging) Messgeräte verwendet. Anhand des rückgestreuten Signals kann in die Wolke „hineingesehen“ werden und Aussagen über die Art der Wasser- und Eispartikel innerhalb der Wolke und ihre räumliche Verteilung gemacht werden. So lassen sich z.B. Wolkenflüssigwasserprofile ableiten. Außerdem werden mit Mikrowellenradiometern atmosphärische Emissionen bei verschiedenen Frequenzen genutzt. Damit lassen sich vertikale Profile der Temperatur, des Wasserdampfes oder des Wolkenflüssigwassergehaltes (LWC) ableiten. Bei Messungen von Flugzeugen, die im Wesentlichen mit Spektrometern ausgestattet sind, wird die Wolke mehrere Male durchflogen und dabei z.B. Temperatur, Druck, Vertikalwind, Verteilungsdichte und Größe der Wasser- und Eispartikel gemessen. Ziel der allgemeinen Untersuchungen ist es nun, die verschiedenen Messergebnisse miteinander in Einklang zu bringen und sie mit Hilfe von analytischen und numerischen Modellen zu verstehen.

Für die Behandlung der Wolkenphysik in Modellen gibt es zwei grundlegende Methoden. Im ersten Fall werden die Berechnungen der Mikrophysik, die variablen Partikelspektren und die stochastischen Gleichungen für das Tropfenwachstum zugrunde gelegt. Die explizite Berechnung der grundlegenden Differentialgleichungen erfordert allerdings enormen Rechenaufwand. Im zweiten Fall wird in einem Wolkenmodell die Wolkenphysik mit Hilfe von Bulk-Formeln parametrisiert. Dabei werden die Erscheinungsformen des Wassers reduziert und sowohl die Form als auch die Größenverteilungen der Partikel vorgegeben, um die Zahl der Gleichungen und Berechnungen möglichst niedrig zu halten. Ein Beispiel für ein solches Modell ist das GESIMA-Modell (Geesthachter Simulationsmodell der Atmosphäre) (Eppel et al. (1995)). Dabei handelt es sich um ein dreidimensionales, nicht-hydrostatisches Mesoskalenmodell, das am GKSS Forschungszentrum Geesthacht entwickelt wurde. Es wurde zur Untersuchung der Zirkulation, der Energetik und des Schadstofftransports im Küstenbereich entwickelt. Dabei wurde besonders Wert auf die Formulierung von Wolkenbildung, Strahlungswechselwirkungen und Energieaustausch zwischen Atmosphäre und Boden gelegt. Es werden in diesem Modell Bulk-Formeln zur Beschreibung von Wolkenwasser, Niederschlag, Wolkeneis, Wasserdampf und den entsprechenden Umwandlungsprozessen zwischen diesen Erscheinungsformen des Wassers benutzt. Zu Testzwecken wurden beobachtete Wetterlagen mit dem Modell simuliert. Dabei ergaben sich gute Übereinstimmungen.

Die Unterschiede, die in einem Modell durch explizite Behandlung aller Differentialgleichungen und durch Parametrisierung der Prozesse auftreten, wurden z.B. von Maxerath (1984) dargestellt. Hierbei ist ein zweidimensionales, instationäres Modell einer Cumuluswolke zugrunde gelegt worden. In diesem Modell wird der vertikale Querschnitt

einer lang gestreckten Zelle hochreichender Feuchtkonvektion beschrieben, wobei das Integrationsgebiet physikalisch abgeschlossen ist, d.h. weder Wärmeflüsse noch materielle oder diffuse Flüsse sind über den Rand hinweg zugelassen. Die Anfangsatmosphäre besteht aus einem Grundzustand, der sich in drei Schichten unterteilt und dem eine Temperaturstörung innerhalb der ungesättigten, neutralen Grundsicht überlagert wird. Die Feuchtkonvektion wird somit durch die Ausläufer des Zirkulationssystems des Störkörpers angeregt. Die Ergebnisse dieses Modells liegen in zwei Varianten vor. Im ersten Modelllauf wurde Cumulus-Konvektion ohne Berücksichtigung der Sedimentation der Wassertropfen, d.h. das Flüssigwasser steht ständig im Gleichgewicht mit dem Wasserdampf und besitzt keine Relativgeschwindigkeit zur umgebenden feuchten Luft, angenommen. Im zweiten Modelllauf wurde die Cumulus-Konvektion unter Berücksichtigung der Mikrophysik des Flüssigwassers mit den vollständigen mikrophysikalischen Gleichungen (einschließlich der Sedimentation der Wassertropfen) durchgeführt. Die Ergebnisse beider Versionen zeigen eine ähnliche Entwicklung der Wolke, die auch der realistischen Entstehung einer Cumuluswolke entspricht. Bei Berücksichtigung der vollständigen Differentialgleichungen tritt zusätzlich wolkeninterner Regen auf, der allerdings innerhalb der Simulationszeit den Boden nicht erreicht, was eventuell auf die Nichtberücksichtigung von Eispartikeln zurückzuführen ist. Des Weiteren bietet der zweite Fall aufgrund der Berücksichtigung der Mikrophysik noch die Möglichkeit die räumliche und zeitliche Entwicklung der Tropfenspektren zu untersuchen. Aufgrund der ähnlichen Entwicklung kann grundsätzlich, je nach Ziel der Untersuchung, auf eine Parametrisierung der mikrophysikalischen Prozesse zurückgegriffen werden, da diese ähnliche Ergebnisse bei kürzerer Rechenzeit liefert.

In der vorliegenden Arbeit werden nun die mikrophysikalischen Prozesse bei der Bildung und dem Wachstum von Wolkenpartikeln untersucht, da ihre Kenntnis für die Entstehung von Niederschlag zwingend erforderlich ist. Dabei werden die elementaren Differentialgleichungen herangezogen und diese numerisch gelöst. Den Ausgangspunkt für die Untersuchungen bilden schon aktivierte Tröpfchen, d.h. das Augenmerk liegt hauptsächlich auf den Wachstumsprozessen innerhalb einer Wolke und nicht auf ihrer Entstehung. Zusätzlich wird die Variabilität der Atmosphäre betrachtet und ihr Einfluss auf das Tropfenwachstum untersucht. Mit dieser Arbeit steht dem Leibniz Institut für Meereswissenschaften der Universität Kiel ein Modell für weitere Arbeiten zur Verfügung, welches z.B. für Strahlungstransportrechnungen spektrale Wolkendaten liefert. Kapitel 2 gibt einen allgemeinen Überblick über Wolken und Niederschlag. Kapitel 3 beschäftigt sich mit dem Kondensationswachstum und Kapitel 4 mit dem Wachstum durch Koaleszenz. Eine Kombination von Tropfenwachstum durch Kondensation und Koaleszenz erfolgt innerhalb Kapitel 5. In Kapitel 6 wird dann eine Schlussbetrachtung mit Ausblick vorgenommen.

Kapitel 2

Wolken und Niederschlag

Eine Wolke wird durch eine sichtbare, in der Luft schwebende Ansammlung kleiner Wasser- und/ oder Eispartikel definiert. Nach einer, von der WMO veröffentlichten, Einteilung wird zwischen tiefen, mittelhohen und hohen Wolken unterschieden. Im untersten Stockwerk (< 2 km) befinden sich reine Wasserwolken, im mittleren unterkühlte Wasser- und Mischwolken (2 bis 7 km) und im obersten reine Eiswolken (7 bis 13 km).

Im folgenden wird der Lebenszyklus eines Wolkentropfens von seiner Entstehung über die Entwicklung bis zum Niederschlag beschrieben.

Wolken entstehen durch Kondensation oder Sublimation übersättigten Wasserdampfes an geeigneten Aerosolkernen. Vorgänge, die zur Übersättigung des Wasserdampfes führen, werden deshalb als wolkenbildende Prozesse bezeichnet. Entsprechend werden solche die zur Untersättigung führen als wolkenauflösend bezeichnet. In der Luft ist immer eine bestimmte Menge Wasserdampf vorhanden, dessen Dichte bei gegebener Temperatur allerdings nur bis zu einem bestimmten Sättigungswert gesteigert werden kann. Dieser maximal mögliche Wasserdampfgehalt nimmt mit der Temperatur zu. Eine Wasserdampfübersättigung kann nun durch verschiedene Vorgänge hervorgerufen werden. So gelangt beispielsweise durch Verdunstung eine größere Menge Wasserdampf in die Atmosphäre. Speziell für die Wolkenbildung relevant ist zum einen die diabatische und zum anderen die adiabatische Abkühlung der Luft.

Der größte Teil der Wolken entsteht durch adiabatische Abkühlung, wenn aufsteigende Luft unter geringeren Druck kommt. Beim Aufsteigen kühlt sich ein Luftpaket ab und es kommt zur Kondensation, sobald der Taupunkt erreicht ist (am sogenannten Kondensationsniveau). Bei weiterer Abkühlung lagert sich der überschüssige Wasserdampf an Kondensationskernen an, wobei Tröpfchen entstehen (Kapitel 3). Kondensationskerne sind Aerosolteilchen, an deren Oberflächen bei relativen Feuchten um oder unter 100 % Kondensation einsetzt. Die Eigenschaften dieser Teilchen bewirken eine Erniedrigung des Dampfdrucks an ihrer Oberfläche, so dass eine Anlagerung von Wasserdampf bei den in der Atmosphäre vorkommenden Feuchten stattfinden kann (Kapitel 3.1.1). Als Kondensationskeime können alle hygroskopischen Substanzen wie Salze, Säuren und Lösungen dieser Stoffe fungieren. Die durch Kondensationswachstum entstande-

nen Tröpfchen erreichen allerdings keine nennenswerte Größe, um als Niederschlag den Boden zu erreichen.

Verstärktes Tropfenwachstum tritt allerdings bei der turbulenten Vermischung trockener Umgebungsluft mit gesättigter Wolkenluft auf. Die Wolke kühlt durch Strahlung an der Oberseite aus und es gelangt kalte Luft in den Wolkenbereich. Dabei mischt sie sich mit der vorhandenen Wolkenluft. Dies führt auf kurzen Zeitskalen zu lokalen Untersättigungen und damit zu Verdunstung. Bei Betrachtung längerer Zeitskalen stellt sich durch die Verdunstung der Wolkenpartikel wieder Sättigung ein. Es entstehen Abwindschläuche mit gesättigter aber tröpfchenfreier Luft. Diese vermischen sich mit den Aufwindschläuchen und führen dort zu einer Reduktion der Tröpfchen. Dabei ändert sich die Übersättigung nur unwesentlich. Die verbleibenden Tröpfchen teilen sich nun den Wasserdampf untereinander auf und wachsen somit zu größeren Tropfen an.

Außerdem haben Wolkentröpfchen die Möglichkeit durch Koaleszenz zu wachsen (Kapitel 4). Mit Koaleszenz wird das Verschmelzen zweier Wolkentröpfchen bezeichnet. In Wasserwolken mit unterschiedlich großen Tropfen besitzen die größeren eine höhere Fallgeschwindigkeit als die kleinen. Außerdem sind sie träger und folgen deshalb Turbulenzbewegungen langsamer. Somit kommt es zur Kollision zwischen großen und kleinen Tropfen.

Ein weiterer wesentlicher Punkt für die Entstehung stärkeren Niederschlags ist das Vorhandensein von Eispartikeln. Über einem Eispartikel herrscht bei gleicher Luftfeuchte eine höhere Übersättigung als über einem Wassertropfen. So kann die Atmosphäre insbesondere bezüglich Eis untersättigt und bezüglich Wasser übersättigt sein. In diesem Fall kann der Eispartikel dann auf Kosten des Wassertropfens wachsen (Bergeron-Findeisen-Prozess) und als Niederschlag ausfallen. Das Wachstum während des Fallens geschieht hier ebenfalls durch Aufsammeln kleinerer Partikel. Auf dem Weg nach unten gelangen die Eispartikel in wärmere Luftschichten und schmelzen. Deshalb kommen sie häufig gleichermaßen als Regen auf dem Erdboden an. Ansonsten handelt es sich um Graupel oder Schnee. Die Art des Niederschlags hängt von der Turbulenz und der Vertikalbewegung innerhalb der Wolke ab. (DWD (1987))

Folgende Abbildung stellt noch einmal schematisch den Lebenszyklus eines Wolkentropfens dar. Zu Beginn befindet sich ein kleiner Wolkentropfen nahe der Wolkenunterkante. Im weiteren Verlauf wird dieser Tropfen durch den in der Wolke herrschenden Aufwind in größere Höhen befördert. Dabei wächst er im Wesentlichen durch Kondensation an. Sobald der Wolkentropfen groß genug ist, dass er aufgrund der Schwerkraft den Aufwind überwindet, fällt er nach unten. Dabei sammelt er kleinere Tropfen ein, d.h. er wächst weiter. Bei Erreichen der Wolkenunterkante hat der Wolkentropfen eine Größe erreicht, die es ihm ermöglicht als Regentropfen zum Erdboden zu fallen.

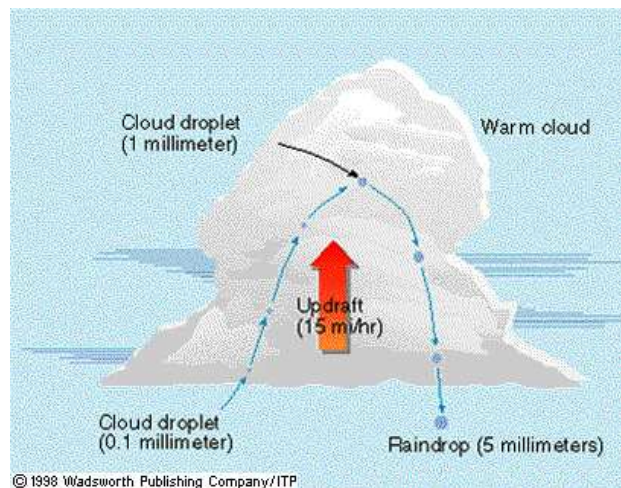


Abbildung 2.1: Lebenszyklus eines Wolkentropfens

Quelle: www.cimms.ou.edu/~cortinas/1014/A05_16.gif

Kapitel 3

Tropfenwachstum durch Kondensation

3.1 Theorie

3.1.1 Bildung von Wolkenpartikeln

Es gibt in der Atmosphäre keine spontane Wolkenbildung, sondern es müssen gewisse Voraussetzungen erfüllt sein. Diese ergeben sich aus einer Kombination von Sättigungsdampfdruckerhöhung aufgrund der Oberflächenspannung und Sättigungsdampfdruckerniedrigung aufgrund der im Tropfen gelösten Stoffe. Der Krümmungseffekt wird anhand folgender Abbildung erläutert.

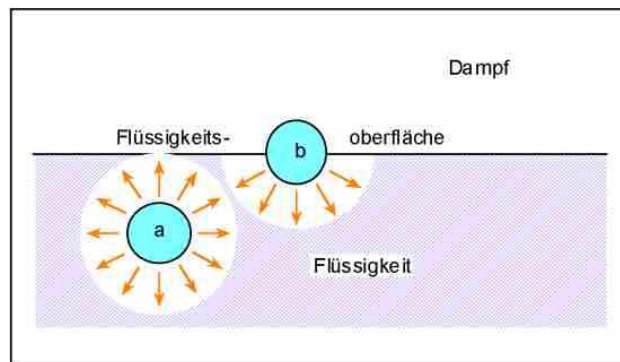


Abbildung 3.1: Veranschaulichung Oberflächenspannung
Quelle: www.spiralex.de/images/oberflaechenspannung.jpg

Hier ist die Oberflächenspannung anhand der Grenzfläche zwischen einer Flüssigkeit und der Luft veranschaulicht. Innerhalb des Tropfeninneren wirken auf jedes Molekül aus allen Richtungen die gleichen Anziehungskräfte. Das Molekül bleibt deshalb im Gleichgewicht. Am Tropfenrand sind diese Kräfte nicht ausgeglichen, da die Anziehungskräfte auf einzelne Richtungen beschränkt sind. Es erfolgt keine Anziehung von Mole-

külen außerhalb des Tropfens. Damit ergibt sich hier eine in das Tropfeninnere gerichtete Kraft, die versucht, die Randmoleküle in das Tropfeninnere zu ziehen. Der Tropfen ist bestrebt, eine möglichst kleine Oberfläche anzunehmen. Damit nun ein im Inneren gebundenes Molekül an die Oberfläche gelangen kann (Verdunstung) wird Arbeit benötigt, die diese Nettoanziehung nach innen und damit eine Differenz in der potentiellen Energie überwindet. Die zu leistende Arbeit ist proportional zur damit verbundenen Oberflächenvergrößerung. Der Proportionalitätsfaktor zwischen Arbeit und Oberflächenvergrößerung wird mit Oberflächenspannung bezeichnet. Damit es nun zum Wachstum von Wolkenpartikeln kommen kann, muss von den Molekülen zuerst die der Krümmung entsprechende Oberflächenspannungsbarriere überwunden werden. Dies geschieht, wenn der umgebende Dampfdruck sehr viel größer ist als der Sättigungsdampfdruck. Zur Herleitung einer Formel für den Sättigungsdampfdruck über gekrümmten Oberflächen wird von mechanischem und chemischem Gleichgewicht ausgegangen (Pruppacher und Klett (1997)).

$$p_w - \frac{2\sigma}{r} = p_v \quad \text{mechanisches Gleichgewicht} \quad (3.1)$$

$$\mu_w(p_w, T) = \mu_v(p_v, T) \quad \text{chemisches Gleichgewicht} \quad (3.2)$$

mit: Index 'v' für Umgebungsdampf, Index 'w' für Tropfeninneres, σ = Oberflächenspannung, μ = chemisches Potential.

In diesem Fall befindet sich der Tropfen mit seiner Umgebung im Gleichgewicht, d.h. es werden pro Zeiteinheit genauso viele Moleküle aufgenommen wie abgegeben. Es tritt keine Netto-Massenänderung auf und der Partialdruck von Wasserdampf an der Tropfenoberfläche ist gleich dem Partialdruck in der Gasphase. Anhand Gleichung 3.1 ist zu erkennen, dass durch die Oberflächenspannung ein Überdruck im Tropfen hervorgerufen wird, um die Kugelform des Tropfens aufrechtzuerhalten. Dieser Unterschied ist um so größer, je kleiner der Tropfen ist. Im chemischen Gleichgewicht gibt es hingegen keine Phasenumwandlungen bzw. chemischen Reaktionen (Gleichung 3.2). Unter Annahme einer konstanten Temperatur für das chemische Potential, was im Gleichgewicht ohne Einschränkungen angenommen werden kann, folgt für den Sättigungsdampfdruck über gekrümmten Oberflächen:

$$e_s(r) = e_s(r = \infty) \exp \left[\frac{2\sigma}{R_v T \rho_w r} \right] \quad (3.3)$$

mit: e_s = Sättigungsdampfdruck, R_v = Gaskonstante für Wasserdampf, T = Temperatur in Kelvin, ρ_w = Wasserdampfdichte

Der Sättigungsdampfdruck über gekrümmten Oberflächen nimmt exponentiell mit $\frac{1}{r}$ zu. Daraus ergibt sich, dass für kleine Radien ein höherer äußerer Dampfdruck erforderlich ist um Sättigung und damit Kondensation zu erreichen. Daher ist homogene Kondensation nahezu unmöglich, da dies extrem kleinen Krümmungsradien entspricht.

Dies ist einfach zu erkennen, wenn das für Verhältnis zwischen dem Sättigungsdampfdruck über einer gekrümmten Oberfläche zu dem über einer ebenen Fläche die entsprechenden kritischen Radien (Gleichgewicht bei diesem Verhältnis) und Molekülzahlen

bestimmt werden (Tabelle 3.1).

Sättigungsverhältnis S	Kritischer Radius r_c [μm]	Molekülzahl n
1	∞	∞
1.01	$1.208 \cdot 10^{-1}$	$2.468 \cdot 10^8$
1.1	$1.261 \cdot 10^{-2}$	$2.807 \cdot 10^5$
1.5	$2.964 \cdot 10^{-3}$	$3.645 \cdot 10^3$
2	$1.734 \cdot 10^{-3}$	730
3	$1.094 \cdot 10^{-3}$	183
4	$8.671 \cdot 10^{-4}$	91
5	$7.468 \cdot 10^{-4}$	58
10	$5.221 \cdot 10^{-4}$	20

Tabelle 3.1: Kritische Radien und Molekülzahlen von reinen Wassertropfchen als Funktion des Sättigungsverhältnisses (aus Rogers und Yau (1989))

Für die Bildung eines Wassertropfens aus 20 Molekülen müsste die Luft z.B. zu 1000 % gesättigt sein, damit der Tropfen nicht sofort wieder verdunstet. Dies ist in der Natur unmöglich.

Für eine Tropfenbildung bei geringerer Übersättigung sorgt der Lösungseffekt. Dazu sollte in der Atmosphäre ein hinreichend großer Kondensationskern vorhanden sein, an dem sich die Wassermoleküle anlagern können (heterogene Kondensation). In der realen Atmosphäre ist dies gegeben, da zur Kondensation kein reines Wasser, sondern eine Lösung zur Verfügung steht. Der Sättigungsdampfdruck der Lösung verringert sich sobald ein im Wasser gelöster Stoff einen geringeren Sättigungsdampfdruck hat als Wasser. Nach dem Raoult'schen Gesetz gilt:

$$\frac{e_s(\text{Lösung})}{e_s(\text{klar})} = 1 - \frac{n}{n_0} \quad (3.4)$$

mit: n_0 Molekülen Wasser, n Molekülen Lösungssstoff.

Durch Einsetzen der entsprechenden Massen und Molekulargewichte ergibt sich für den Sättigungsdampfdruck einer Lösung:

$$\frac{e_s(\text{Lösung})}{e_s(\text{klar})} = 1 - \frac{3im_w M_s}{4\pi m_s \rho_w r^3} \quad (3.5)$$

mit: i = van't Hoff Faktor (gibt die Anzahl der Lösungsprodukte des Lösungssstoffes an), m_w , m_s = Molekulargewicht Wasser, Lösung, M_s = Masse Lösung

Für kleine Tropfenradien ist die Konzentration der Lösung höher und damit verringert sich der Sättigungsdampfdruck.

Der tatsächliche Sättigungsdampfdruck eines Wassertropfens berechnet sich nun aus der Kombination von Krümmungs- und Lösungseffekt. Dies wird durch die Köhler-Kelvin

Beziehung beschrieben (Köhler (1921)).

$$\underbrace{S-1}_{\text{Übersättigung}} = \underbrace{\frac{a}{r}}_{\text{Krümmungseffekt}} - \underbrace{\frac{b}{r^3}}_{\text{Lösungseffekt}} - \frac{ab}{r^4} \quad (3.6)$$

mit $b = \frac{3im_w M_s}{4\pi m_s \rho_w}$ und $a = \frac{2\sigma}{R_v T \rho_w}$

Der Verlauf der Übersättigung wird in der so genannten Köhler-Kurve dargestellt.

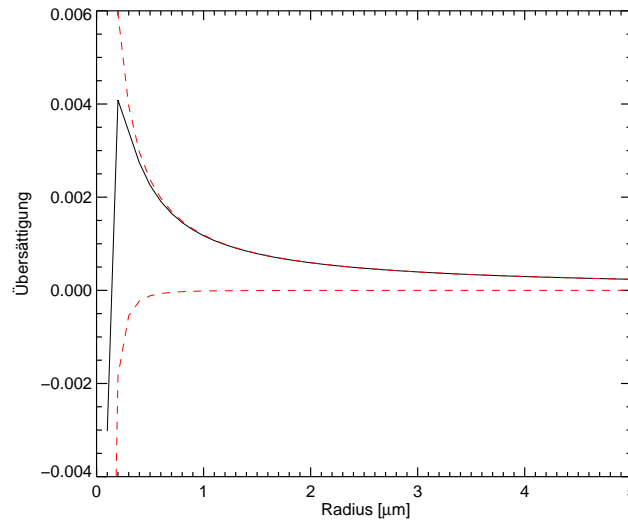


Abbildung 3.2: Köhler-Kurve (schwarze Kurve) als Funktion von Krümmungseffekt (obere rot gestrichelte Kurve) und Lösungseffekt (untere rot gestrichelte Kurve)

Diese Kurve gilt nur im Gleichgewicht zwischen Tropfen und Umgebung. Der Bereich der Übersättigung befindet sich oberhalb der Kurve und der Bereich der Untersättigung unterhalb, d.h. durch die Kurve werden die beiden Bereiche voneinander getrennt. Die obere rot gestrichelte Kurve beschreibt die Änderung der Übersättigung aufgrund des Krümmungseffektes. Der Lösungseffekt wird durch die untere rot gestrichelte Kurve beschrieben. Für kleinere Tropfen wird der Verlauf der Köhler-Kurve im Wesentlichen durch den Lösungseffekt bestimmt, während sich bei größeren Tropfen die Köhler-Kurve und die Kurve des Krümmungseffektes einander immer weiter annähern, d.h. dieser Effekt dominiert.

Je nach Position des Tröpfchens auf der Köhler-Kurve hat dieses unterschiedliche Auswirkungen auf das weitere Wachstum. Befindet sich das Tröpfchen auf dem aufsteigenden Ast der Kurve, so gerät der Tropfen bei abnehmender Feuchte sofort in Untersättigung und verdunstet, bis er sich wieder im Gleichgewicht befindet. Bei zunehmender Feuchte erfolgt Wachstum, bis er ebenfalls wieder das Gleichgewicht erreicht hat. D.h. auf dem aufsteigenden Ast herrscht ein stabiler Gleichgewichtszustand. Befindet sich das Tröpfchen nun aber auf dem absinkenden Ast der Kurve, so führt abnehmende Feuchte theoretisch zu extremen Größenverlust und zunehmende Feuchte zu unbegrenztem

Wachstum. D.h. in diesem Bereich ist der Gleichgewichtszustand labil.

3.1.2 Wachstum von Wolkenpartikeln

Durch heterogene Kondensation erfolgt für Wolkentropfen unmittelbar das Wachstum durch Wasserdampfanlagerung aus einer übersättigten Atmosphäre (Diffusionswachstum). Die Ableitung einer Formel für das Diffusionswachstum erfolgt unter folgenden Annahmen (Pruppacher und Klett (1997), Rogers und Yau (1989)):

- kugelförmiger, ruhender Tropfen
- nur radiale Änderungen der umgebenden Wasserdampfkonzentration zugelassen
- Wasserdampftransport durch Diffusion im Außenraum des Tropfens
- isotherme, isobare und isochore Umgebung des Tropfens

Die Bilanzgleichung für den Wasserdampf (2. Fick'sches Gesetz) reduziert sich somit in Kugelkoordinaten zu:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial n(R)}{\partial t}}_{\text{2. Fick'sches Gesetz}} = -D \nabla^2 n = \frac{D}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial n(R)}{\partial R} \right) \quad (3.7)$$

mit: R = Abstand eines Punktes außerhalb des Tropfens zum Tropfenmittelpunkt, $n(R)$ = Wasserdampfkonzentration, D = Diffusionskoeffizient

Der Wasserdampffluss $D \nabla n(R) \rightarrow D \frac{\partial n(R)}{\partial R}$ durch die Kugelfläche $4\pi r^2$ bewirkt eine zeitliche Massenänderung.

$$\left. \frac{\partial m}{\partial t} \right|_{R=r} = 4\pi r^2 D \frac{\partial n(R)}{\partial R} m_0 = 4\pi r D (\rho_v - \rho_{vr}) \quad (3.8)$$

mit: m_0 = Molekülmasse, ρ_{vr} = Wasserdampfdichte des Tropfens (aus Tröpfchenradius, Temperatur und chemischer Zusammensetzung), ρ_v = Wasserdampfdichte

Der Klammerausdruck regelt die Massenzu- bzw. abnahme, da bei $\rho_v > \rho_{vr}$ Kondensation und damit Massenzunahme und bei $\rho_v < \rho_{vr}$ Verdunstung also Massenabnahme auftritt. Diese beiden Prozesse rufen unweigerlich eine Temperaturänderung hervor. Es tritt also eine Temperaturdifferenz zwischen Tropfen und Umgebung auf, die durch den Fluss sensibler Wärme (Wärmediffusion) ausgeglichen werden muss. Die Flussdichte \vec{j} für den Wärmetransport ist dabei durch Fourier's Gesetz gegeben.

$$\vec{j} = -K \nabla T \quad (3.9)$$

mit K = Wärmeleitfähigkeit von Luft

Davon ausgehend ergibt sich unter Berücksichtigung der physikalisch sinnvollen Prozesse, analog zur Massenänderung des Wasserdampfes, eine Gleichung für die Änderung der Wärmemenge.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 4\pi r K (T_r - T) \quad (3.10)$$

mit: Q = Wärmemenge, T_r = Temperatur Tropfen, T = Temperatur Umgebung
 Da dies nach dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik eine Temperaturänderung des Tropfens zur Folge hat, wird angenommen, dass das Tröpfchenwachstum bei einer ausgeglichenen Wärmebilanz stattfindet. D.h. die durch Kondensation gewonnene Wärme wird diffusiv wieder an die Umgebung abgegeben. So ergibt sich aus der Massenzuwachsgleichung eine Gleichung für die Änderung des Tropfenradius:

$$\frac{dm}{dt} = \rho_w 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \quad (3.11)$$

Nun wird letztendlich eine Formel für das Diffusionswachstum eines einzelnen Tropfens in unbewegter Atmosphäre hergeleitet. Der Ausgangspunkt ist in diesem Fall die Clausius-Clapeyron-Gleichung.

$$de_s = \frac{Le_s}{R_v T^2} dT \quad (3.12)$$

Unter der Annahme, dass die Luft stets gesättigt ist und unmittelbar am Tropfenrand Sättigung herrscht (ausführlicher bei Pruppacher und Klett (1997) sowie bei Rogers und Yau (1989) dargestellt) folgt:

$$S - 1 = \left[\frac{1}{4\pi r D \rho_{vrs}} - \left(1 - \frac{L}{R_v T} \right) \frac{L}{4\pi r K T} \right] \frac{dm}{dt} \quad (3.13)$$

Mit Gleichung 3.11 und $\rho_{vrs} \approx \rho_{vs} = \frac{e_s}{R_v T}$ folgt:

$$S - 1 = \left[\underbrace{\left(\frac{L}{R_v T} - 1 \right) \frac{L \rho_w}{K T}}_{F_K = \text{Wärmeleitfähigkeit}} + \underbrace{\frac{R_v T \rho_w}{D e_s}}_{F_D = \text{Diffusionsterm}} \right] r \frac{dr}{dt} \quad (3.14)$$

Mit Berücksichtigung des Krümmungs- und Lösungseffektes ergibt sich:

$$r \frac{dr}{dt} = \frac{S - 1 - \frac{a}{r} + \frac{b}{r^3} + \frac{ab}{r^4}}{F_K + F_D} \quad (3.15)$$

Diese Gleichung ist ohne vereinfachende Annahmen analytisch nicht lösbar, deshalb erfolgt im folgenden eine numerische Lösung.

3.2 Umsetzung im Modell

Die Entwicklung eines Tropfens aufgrund des Diffusionswachstums nach Gleichung 3.15 soll nun lediglich mit Hilfe gemessener Daten wie Lufttemperatur, Luftdruck und spezifische Feuchte simuliert werden. Dazu werden alle abhängigen Größen mit Hilfe geeigneter Parametrisierungen aus der Gleichung eliminiert. Zur Verdeutlichung wird jeder Term einzeln betrachtet.

1. Term: $\alpha = \frac{2\sigma}{R_v T \rho_w}$

In diesem Fall ist die unbekannte Größe die Oberflächenspannung. Zur Berechnung wurde eine Parametrisierung von Hänel (1970), die sowohl die Temperaturabhängigkeit als auch die Konzentrationsabhängigkeit der Oberflächenspannung berücksichtigt, herangezogen.

$$\sigma = \sigma(T_0) - a'(T - T_0) + b' \frac{1 - \frac{p}{p_0}}{\mu_s \frac{p}{p_0}} \quad [10^{-5} \text{N/cm}] \quad (3.16)$$

mit: $\sigma(T_0) = 75,6 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$, $a' = 0,153 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm } ^\circ\text{K}$ (Materialkonstante des Wassers), $b' = 27,6 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ (Materialkonstante der wasserlöslichen Substanz, in diesem Fall NaCl), $\mu_s = \frac{m_w}{m_s}$

2. Term: $\left(\frac{L}{R_v T} - 1 \right) \frac{L \rho_v}{K T}$

Hier wird zum einen die Kondensationswärme L mittels einer Näherung von Liljequist und Cihak (1994) berechnet.

$$L = (2,5008 - 0,002372t) \cdot 10^6 \quad [\text{J/kg}] \quad (3.17)$$

mit: t = Temperatur in $^\circ\text{C}$

Des Weiteren wurde für die Wärmeleitfähigkeit eine Parametrisierung von Beard und Pruppacher (1971) herangezogen.

$$K = (5,69 + 0,017t) \cdot 10^{-5} \quad [\text{cal/cms}^\circ\text{C}] \quad (3.18)$$

mit: t = Temperatur in $^\circ\text{C}$

3. Term: $\frac{R_v T \rho_w}{D e_s}$

Die Berechnung des Diffusionskoeffizienten erfolgt nach Hall und Pruppacher (1976).

$$D = 0,211 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1,94} \left(\frac{p_0}{p} \right) \quad [\text{cm}^2/\text{s}] \quad (3.19)$$

mit: $T_0 = 273,15 \text{ K}$, $p_0 = 1013,25 \text{ hPa}$

Diese Parametrisierung gilt für Wasserdampf in Luft bei Temperaturen zwischen -40° und 40°C .

Der Sättigungsdampfdruck berechnet sich aus der Magnus-Formel nach Murray (1967).

$$e_s = 6,1070 \exp \left[\frac{17,15(T - T_0)}{T - 38,25} \right] \quad [\text{hPa}] \quad (3.20)$$

Wenn alle diese angegebenen Parametrisierungen in Gleichung 3.15 eingesetzt werden, kann eine Lösung mit gemessenen Daten erfolgen. Für die vorliegende Simulation wurde ein Radiosondenaufstieg vom Forschungsschiff Polarstern von einer Fahrt in die Antarktis am 2.10.1987 verwendet. Während des Aufstieges, der um 16.27 Uhr bei einer Starthöhe von 10 m stattfand, befand sich das Schiff bei $-12,95^\circ$ geographischer Länge und

38,00° geographischer Breite. Von diesem Aufstieg wurden die Temperatur, der Luftdruck und die spezifische Feuchte verwendet, um die übrigen Größen zu berechnen.

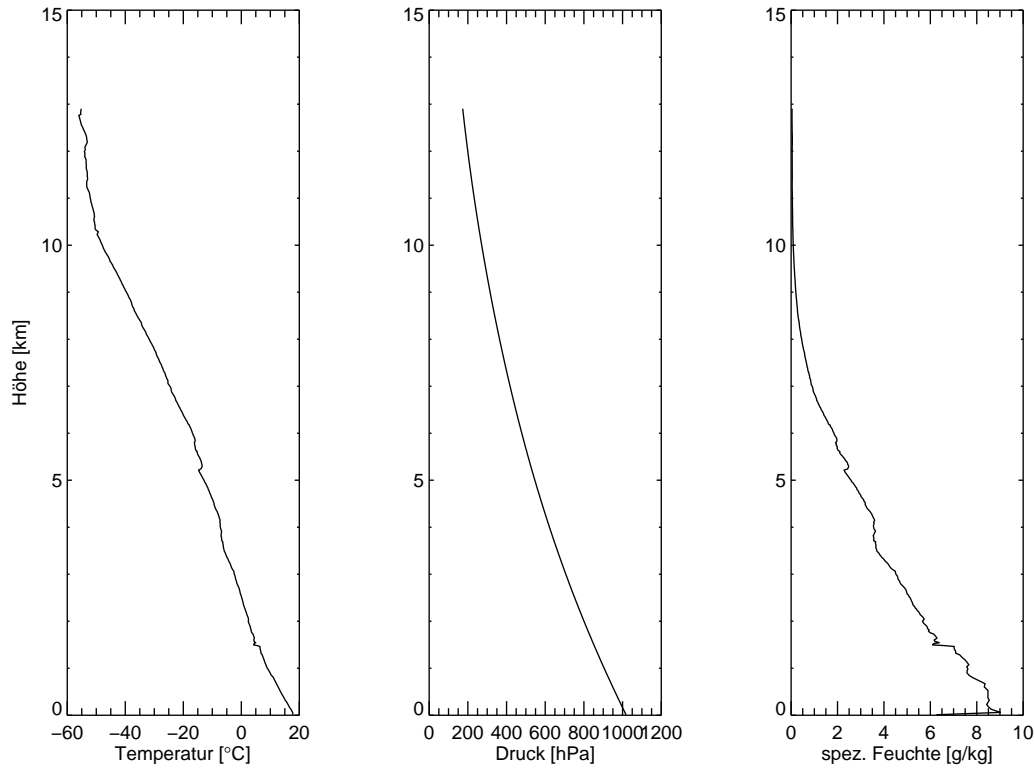


Abbildung 3.3: Radiosondenaufstieg vom 2.10.1987, links: Temperaturänderung mit der Höhe, mitte: Druckänderung mit der Höhe, rechts: Änderung der spezifischen Feuchte mit der Höhe

Um zusätzlich zur zeitlichen Entwicklung eine räumliche Entwicklung des Tropfens zu betrachten, wurde mittels der effektiven Geschwindigkeit des Tropfens bei jedem Zeitpunkt die neue Höhe berechnet. Die effektive Geschwindigkeit ergibt sich aus der Differenz zwischen Aufwind und Fallgeschwindigkeit des Tropfens. Die Fallgeschwindigkeit des Tropfens ergibt sich unter der Annahme einer gleichmäßigen Beschleunigung. Außerdem soll der Tropfen ständig eine so genannte Endgeschwindigkeit einnehmen. Diese berechnet sich aus der Bilanz von Schwerkraft, Auftriebskraft und Reibungskraft. Für die Berechnung der Fallgeschwindigkeit wurden Parametrisierungen nach Rogers und Yau (1989) verwendet. Dabei erfolgt eine Einteilung in drei Größenbereiche. Für Tropfengrößen kleiner 40 μm gilt:

$$v = \frac{2}{9} \frac{r^2 g \rho_w}{\mu} \equiv k_1 r^2 \quad (3.21)$$

mit: $k_1 = 1.19 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Die Fallgeschwindigkeit wächst also mit dem Quadrat ihres Radius. Für Tropfengrößen größer 40 μm und kleiner 0.6 mm gilt:

$$v \approx k_3 r \quad (3.22)$$

mit: $k_3 = 8 * 10^3 \text{s}^{-1}$. In diesem Bereich erfolgt also ein linearer Zusammenhang. Für Tropfengrößen größer 0.6 mm gilt:

$$v \approx k_2 \sqrt{r} \quad (3.23)$$

mit: $k_2 = 2.2 * 10^3 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \text{cm}^{\frac{1}{2}}\text{s}^{-1}$. Bei großen Tropfen tritt demnach eine Wurzelabhängigkeit der Fallgeschwindigkeit auf.

Die im Weiteren ebenfalls verwendete Tropfengrößenverteilungen (Abbildung 3.4) stammt aus einer Messkampagne, die 1997 über Kamenz stattfand (Wendisch, Institut für Troposphärenforschung, Leipzig).

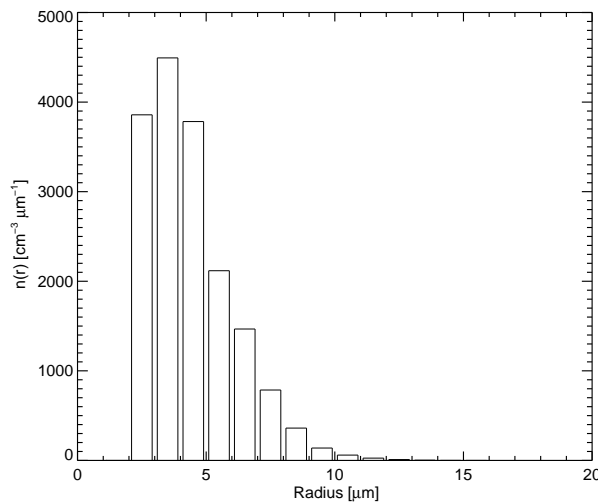


Abbildung 3.4: gemessene Tropfengrößenverteilung 1997 über Kamenz

Das Tröpfchenwachstum und der Transport der Tröpfchen innerhalb der vorgegebenen Atmosphäre erfolgt durch Kopplung der Gleichungen. So wird zu jedem Zeitschritt mit Gleichung 3.15 ein neuer Radius berechnet und mit diesem die Fallgeschwindigkeit des Tröpfchens. Die effektive Geschwindigkeit des Tröpfchens ergibt sich dann aus der Differenz zwischen einem vorgegebenen Aufwind und seiner Fallgeschwindigkeit. Mittels der effektiven Geschwindigkeit und des gewählten Zeitschritts berechnet sich schließlich die zugehörige Höhenänderung des Tröpfchens. So können zu jedem Zeitschritt die Tröpfcheneigenschaften angegeben werden.

3.3 Auswertung

3.3.1 Entwicklung eines einzelnen Tropfens

In diesem Abschnitt soll das Verhalten eines einzelnen Tropfens nach Gleichung 3.15 untersucht werden. Dazu wird ein Tropfen mit Radius 10 μm betrachtet, d.h. es handelt sich um einen aktivierten Tropfen. Betrachtet werden lediglich Wachstumsprozesse und keine Bildungsprozesse. Um nur seine Reaktion auf Änderungen in der Sättigung der

Atmosphäre zu testen, wird über das gesamte Integrationsgebiet eine Übersättigung von $S = 1.01$ vorgegeben.

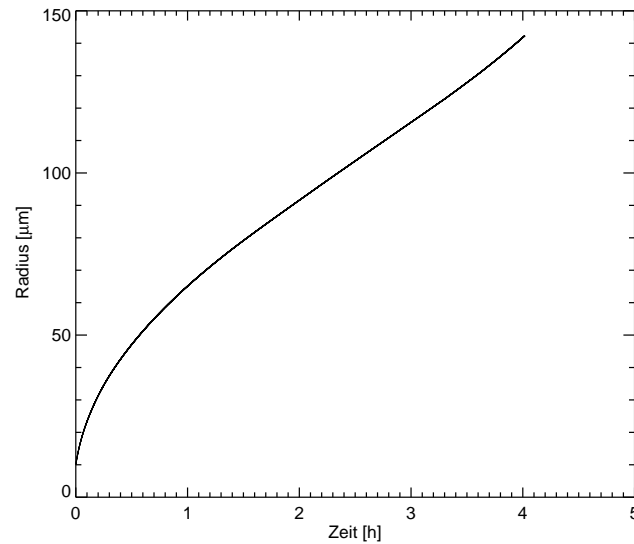


Abbildung 3.5: Tropfenwachstum für $S = 1.01$

Dargestellt ist in Abbildung 3.5 die zeitliche Entwicklung des Tropfenwachstums. Es ist zu erkennen, dass bei vorherrschender Übersättigung der Tropfen kontinuierlich wächst. Wird dieser Tropfen nun in ein Gebiet gebracht in dem über den gesamten Integrationszeitraum eine Untersättigung von $S = 0.99$ vorliegt, so ist Verdunstung zu erwarten.

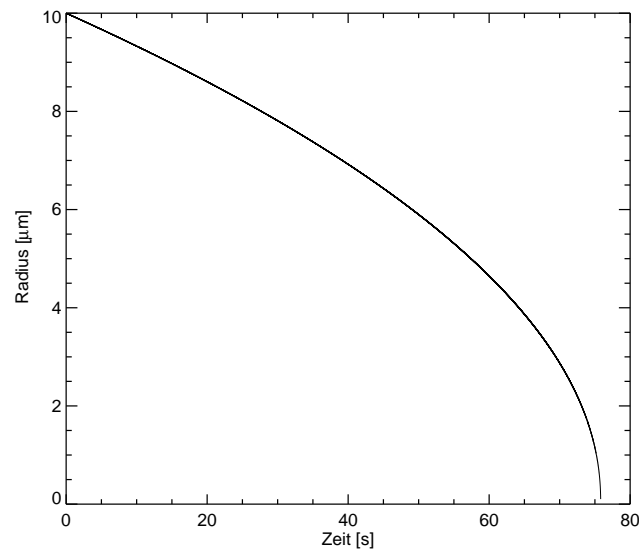


Abbildung 3.6: Tropfenwachstum für $S = 0.99$

Anhand der Abbildung 3.6 wird diese Annahme bestätigt. Auffällig ist, dass der Tropfen

schon bei geringer Übersättigung nur kurz in der Atmosphäre verbleibt bevor er komplett verdunstet ist. Der Verdunstungsvorgang erfolgt auf kürzeren Zeitskalen als der Wachstumsvorgang.

Diese beiden Abbildungen stellen das prinzipielle Verhalten eines Tropfens bei unterschiedlichen Umgebungsbedingungen dar.

3.3.2 Entwicklung eines Tropfenensembles

Um nun das Verhalten einer kompletten Tropfenpopulation zu untersuchen, wird in diesem Abschnitt eine gemessene Tropfengrößenverteilung vorgegeben und ihre Entwicklung als Funktion der Umgebungsbedingungen betrachtet.

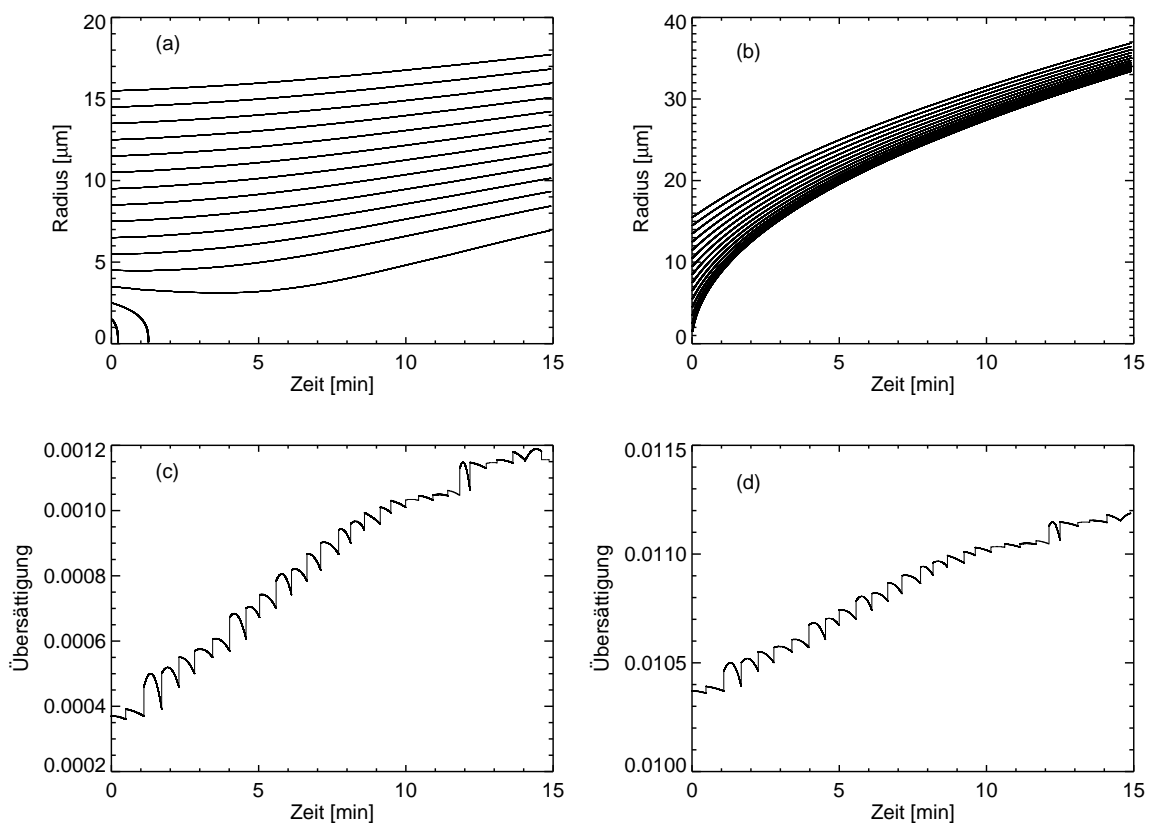


Abbildung 3.7: Tropfenwachstum einer kompletten Tropfenpopulation für unterschiedliche Übersättigungen, (a),(c): direkt berechnete Übersättigung, (b),(d): berechnete Übersättigung + 0.01

Dargestellt ist in Abbildung 3.7 auf den oberen beiden Bildern der zeitliche Verlauf der Tropfenradien und auf den beiden unteren der zeitliche Verlauf der Übersättigung. Die Ergebnisse der beiden linken Bilder stammen direkt aus den Messungen, da die Übersättigung mit Hilfe der Messwerte berechnet wurde. Die Ergebnisse der beiden rechten Bilder wurden modifiziert, indem zu dem berechneten Sättigungsmischungsverhältnis jeweils 0.01 addiert wurde. Beim Betrachten von (a) fällt auf, dass obwohl während des

gesamten Zeitraumes Übersättigung geherrscht hat, die kleinen Tropfen verdunstet sind. Damit auch die kleineren Tröpfchen wachsen können, muss also die Übersättigung größer sein. Dieser Sachverhalt wird durch die Bilder auf der rechten Seite unterstützt. Aufgrund der Zunahme der Übersättigung wachsen nun alle Tropfen gleichermaßen. Beim Vergleich der einzelnen Wachstumskurven ist festzustellen, dass es anfangs ein schnelleres Wachstum von Tropfen mit großen Kondensationskernen gibt. Nach einiger Zeit nähern sich die Kurven allerdings immer mehr einander an.

Begründen lässt sich dieses Verhalten anhand von Gleichung 3.15. So ist eine analytische Lösung der Gleichung unter folgenden Annahmen möglich (Rogers und Yau (1989)):

- Der Tropfen ist hinreichend groß, so dass Krümmungs- und Lösungseffekte vernachlässigt werden können, d.h. $\frac{a}{r} + \frac{b}{r^3} + \frac{ab}{r^4} = 0$.
- Das diffuse Tropfenwachstum findet bei konstanter Temperatur statt, d.h. der Tropfen soll in der unbewegten Luftschicht schweben und nicht ausfallen. Damit folgt weiter $F_K, F_D = \text{const.}$

Mit diesen Annahmen reduziert sich Gleichung 3.15 zu:

$$r \frac{dr}{dt} = \frac{S - 1}{F_K + F_D} \equiv \epsilon = \text{const.} \quad (3.24)$$

Integration von $r_0 \equiv r(t=0)$ bis r ergibt:

$$r^2(t) - r_0^2 \approx 2\epsilon t \Rightarrow r(t) \approx \sqrt{r_0^2 + 2\epsilon t} \quad (3.25)$$

Das Wachstum der Tropfen wird also in 1. Näherung durch eine Wurzelfunktion beschrieben. Ein Tropfenspektrum, dass nach dieser Gleichung wächst wird damit im Laufe der Zeit immer schmaler. Damit lässt sich erklären, dass trotz unterschiedlicher Anfangsradien die Tropfengrößen einander immer ähnlicher werden.

Diese Entwicklung wird ebenfalls deutlich, wenn nun ein gemessenes Tropfenspektrum betrachtet wird. In Abbildung 3.8 ist die zeitliche Änderung des Tropfenspektrums selber zu verschiedenen Zeitpunkten dargestellt. Bei der Messung erstreckt sich das Tropfenspektrum über einen Tropfengrößenbereich von $1.5 \mu\text{m}$ bis $16.5 \mu\text{m}$. Dabei befindet sich das Maximum der Tropfenkonzentration bei kleineren Tropfen. Dieses Maximum verschiebt sich im Laufe der Zeit zu immer größeren Tropfen. Gleichzeitig nimmt die Breite des gesamten Spektrums ab und es bildet sich ein auf wenige Tropfengrößen beschränktes Maximum heraus. Diese Entwicklung begründet sich in der \sqrt{t} - Abhängigkeit des Tropfenwachstums.

Die tendenzielle Entwicklung ist von dem ursprünglichen Tropfenspektrum unabhängig. Dies wird deutlich, wenn nun eine, zum Zeitpunkt $t = 0$, konstante Tropfengrößenverteilung betrachtet wird. Abbildung 3.9 stellt entsprechend Abbildung 3.8 die Änderung des Tropfenspektrums zu verschiedenen Zeitpunkten dar. Die Breite des Spektrums nimmt in diesem Fall allerdings deutlich langsamer ab. Es erfolgt anfangs im Wesentlichen eine Verschiebung zu größeren Tropfen. Erst nach einiger Zeit bildet sich ein schmaleres Spektrum aus. Damit ist nachgewiesen, dass das Ergebnis von Gleichung 3.15 von den

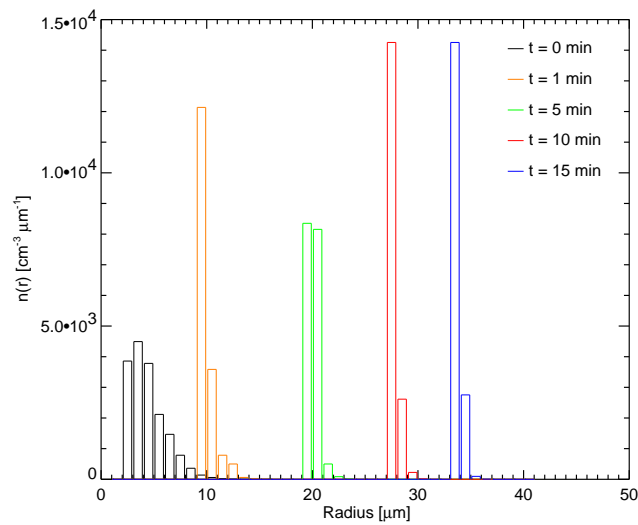


Abbildung 3.8: Entwicklung der Tropfenspektren für eine gemessene Verteilung

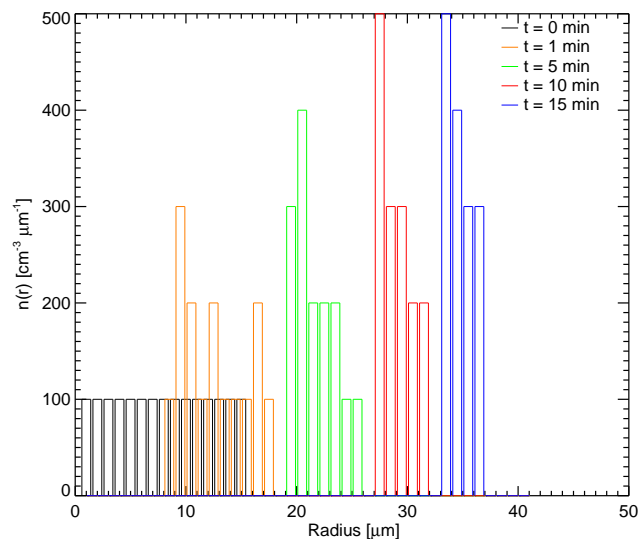


Abbildung 3.9: Entwicklung der Tropfenspektren für eine konstante Verteilung

Eingangsspektren unabhängig ist. Allerdings ist das Spektrum mit einer konstanten Eingangsverteilung nach derselben Wachstumszeit deutlich breiter als das einer gemessenen Eingangsverteilung. Der Unterschied begründet sich in dem Aussehen der Eingangsverteilung. Während bei der gemessenen Verteilung viele kleine und nur wenige große Tropfen vorhanden sind, die in die entsprechenden Größenbereiche wachsen, ist die andere Verteilung konstant über alle Größenbereiche, d.h. es gibt ebenso viele große wie kleine Tropfen die wachsen. Damit ergeben sich mehr Möglichkeiten für Wachstum in unterschiedliche Größenbereiche. Erst nachdem sich die einzelnen Radien einander angenähert haben, erfolgt eine deutliche Reduzierung der Breite des Spektrums.

3.3.3 Variation der Umgebungsparameter

In diesem Abschnitt soll der Einfluss der Umgebungsparameter, wie Temperatur, spezifische Feuchte und Aufwind, auf das Tropfenwachstum untersucht werden. Dazu werden diese Parameter auf verschiedene Art und Weise verrauscht.

In Abbildung 3.10 sind die Vertikalprofile der Umgebungstemperatur und der spezi-

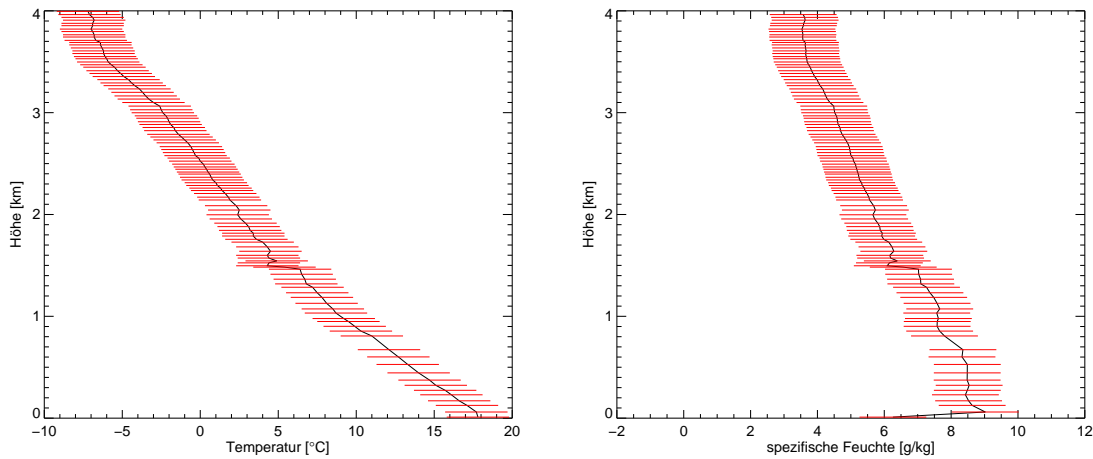


Abbildung 3.10: Ausschnitt aus dem Radiosondenaufstieg (Abbildung 3.3) für den relevanten Höhenbereich, roter Bereich gibt das Intervall der Verrauschung an

fischen Feuchte dargestellt. Dabei handelt es sich um die unteren 4 km des Radiosondenprofils (Abbildung 3.3), da sich die Tropfenentwicklung auf diese Höhenschicht beschränkt. Die schwarze Kurve entspricht dem gemessenen Verlauf ohne Einflussnahme von außen. Dieser Zustand wird im Folgenden mit Normalzustand und seine Bedingungen als Normalbedingungen bezeichnet. Zusätzlich geben die roten Schattierungen den Bereich der Verrauschung an. Bei diesen Rauschamplituden handelt es sich um Extremwerte. Innerhalb eines Zeitschrittes ist die reale Variation der Umgebungsparameter deutlich geringer. Allerdings sind die auftretenden Effekte qualitativ gleich, lediglich in weniger stark ausgeprägter Form.

Im ersten Schritt wird der gemessenen Größe ein, in einem vorgegebenen Intervall, zufallsverteilter Wert addiert. Dies geschieht bei jedem Zeitschritt unabhängig voneinander.

Der Einfluss auf das Tröpfchenwachstum wird zuerst für jeden Parameter separat betrachtet und anschließend für eine gekoppelte Verrauschung.

Die Untersuchungen wurden an einem Tropfen mit $10\text{ }\mu\text{m}$ Startradius bei einer Starthöhe von 3 km und einem konstant vorgegebenen Aufwind von $0.5\text{ }\frac{\text{m}}{\text{s}}$ vorgenommen.

Zunächst wurde eine Verrauschung der Umgebungstemperatur vorgenommen, also

$$T = T_{\text{mess}} + R; \quad R \in [-2, 2] \quad (3.26)$$

Bei R handelt es sich um eine gleichverteilte Zufallszahl aus dem angegebenen Definitionsbereich. Abbildung 3.11 zeigt im oberen Bild die sich hiermit ergebene zeitliche

Entwicklung des Radius, im mittleren die der Höhe und im unteren die der effektiven Geschwindigkeit. In schwarz ist jeweils das Verhalten des Tropfens unter Normalbedingungen dargestellt, während es sich bei den roten Kurven um den verrauschten Zustand handelt. Der Sprung in der Kurve der effektiven Geschwindigkeit ergibt sich aus dem Übergang zwischen den verschiedenen Parametrisierungen (in diesem Fall von quadratischer Abhängigkeit zur linearen bei $40\text{ }\mu\text{m}$ Tropfenradius). Es sind schon auf den ersten Blick deutliche Unterschiede festzustellen. Der Tropfen des verrauschten Zustandes wächst langsamer gegenüber dem des Normalzustandes (Erklärung erfolgt später anhand Abbildung 3.20). Damit ergibt sich eine höhere Lebensdauer in der Wolke. Gleichzeitig führt dies zu geringfügig mächtigeren Wolken, was in der mittleren Abbildung zu erkennen ist. Die Aufwärtsgeschwindigkeit selber ist eng mit dem Tropfenradius verknüpft und deshalb bei geringerem Radius größer. Sie bewirkt auch das Vordringen des Tropfens in größere Höhen.

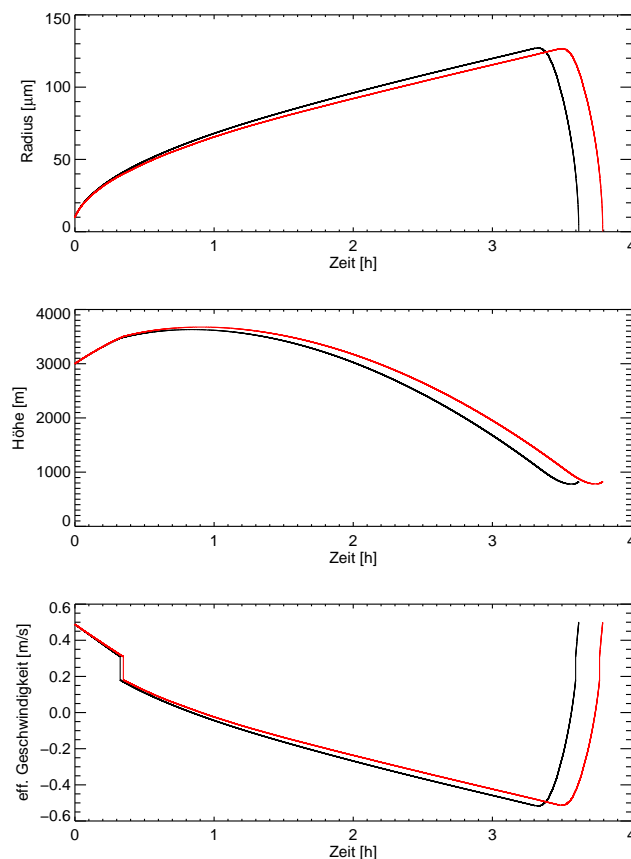


Abbildung 3.11: zeitlicher Verlauf der Tropfeneigenschaften bei einer Variation der Umgebungstemperatur um $\pm 2\text{ K}$, Vergleich zwischen Normalbedingungen (schwarze Kurven) und verrauschtem Zustand (rote Kurven)

Wird nun die Entwicklung der Tropfengrößenverteilung betrachtet (Abbildung 3.12), so ist die grundlegende Tendenz identisch mit der unter Normalbedingungen. Es erfolgt mit der Zeit eine Abnahme der Breite des Spektrums. Allerdings ist in diesem Fall die Ab-

nahme langsamer. Zum jeweils betrachteten Zeitpunkt ist das Spektrum etwas breiter. Dies liegt wiederum an dem langsameren Wachstum der Tropfen. Die Radien der einzelnen Tropfen haben sich zu dem entsprechenden Zeitpunkt einander noch nicht so stark angenähert, wie bei Normalbedingungen aufgrund der \sqrt{t} - Abhängigkeit der Wachstumsgleichung.

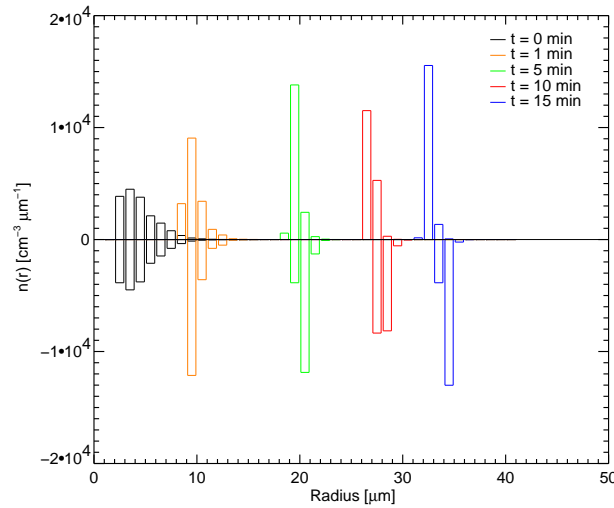


Abbildung 3.12: Entwicklung der Tropfenspektren für eine Variation der Temperatur um ± 2 K und invers die Entwicklung der Tropfenspektren unter Normalbedingungen

Im folgenden ist die spezifische Feuchte um $\pm 1 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$ verrauscht worden, d.h.

$$q = q_{\text{mess}} + R; \quad R \in [-1, 1] \quad (3.27)$$

In Abbildung 3.13 wird der zeitliche Verlauf der Tropfenparameter bei einer Variation der spezifischen Feuchte analog zu Abbildung 3.11 dargestellt. Diesmal sind keine wesentlichen Unterschiede zwischen den beiden Bedingungen erkennbar. Die Kurve im Fall des verrauschten Zustandes verläuft im Wesentlichen auf der des Normalzustandes. Die Betrachtung der Entwicklung des Tropfenspektrums (Abbildung 3.14) bestätigt dies. Die Breite des Spektrums ist in diesem Fall identisch mit der des Normalzustandes. Allerdings verteilen sich die Tropfen anders auf die verschiedenen Größenbereiche. Das Hauptmaximum ist geringer, dafür gibt es Nebenmaxima. Die Einteilung der einzelnen Tropfen erfolgt in diskrete Tropfenintervalle. Deshalb genügt schon eine minimale Abweichung gegenüber dem Normalzustand um in eine andere Größenklasse zu fallen. Die Betrachtung der Differenz zwischen den Kurven des Normalzustandes und denjenigen des verrauschten Zustandes zeigt, dass eine Abweichung zwischen beiden vorliegt (Abbildung 3.15). So erklärt sich die Verschiebung bei den Größenspektren.

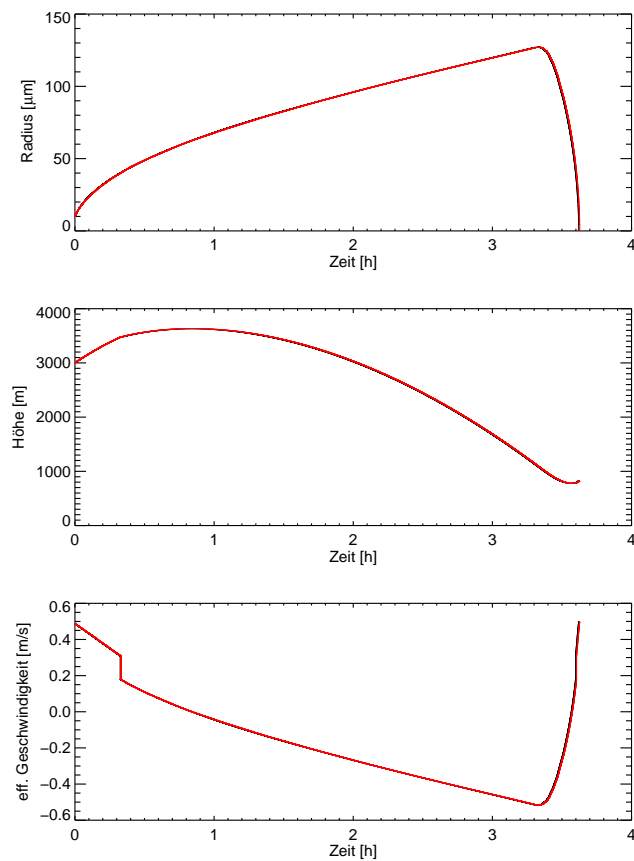


Abbildung 3.13: zeitlicher Verlauf der Tropfeneigenschaften bei einer Variation der spezifischen Feuchte um $\pm 1 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$, Vergleich zwischen Normalbedingungen (schwarze Kurven) und veranschtem Zustand (rote Kurven)

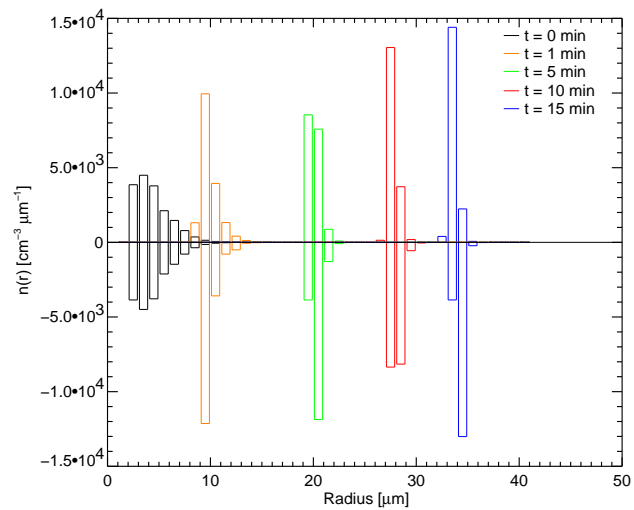


Abbildung 3.14: Entwicklung der Tropfenspektren für eine Variation der spezifischen Feuchte um $\pm 1 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$ und invers die Entwicklung der Tropfenspektren unter Normalbedingungen

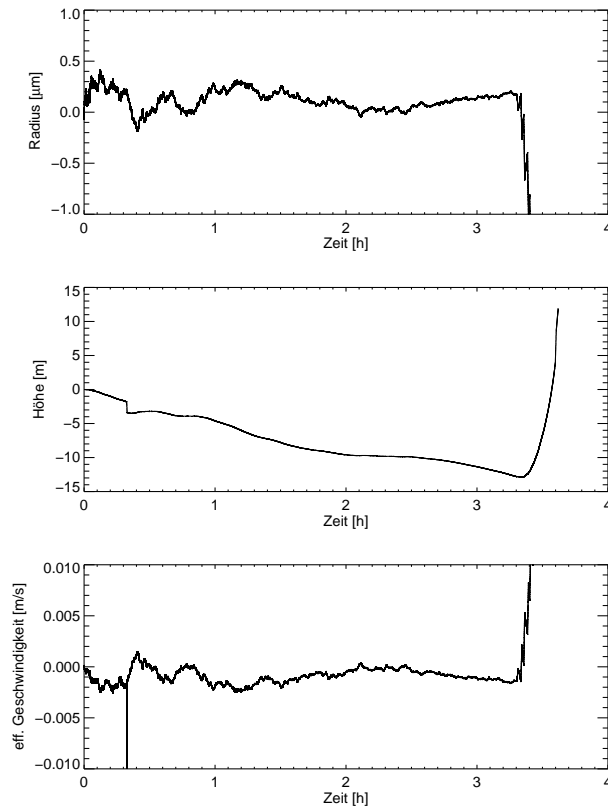


Abbildung 3.15: zeitlicher Verlauf der Differenz der Tropfeneigenschaften zwischen Normalzustand und verrauschem Zustand (Variation der spezifischen Feuchte um $\pm 1 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$)

Schließlich wird der Aufwind variiert. Diesem ist ein Rauschen von $\pm 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ überlagert, d.h.

$$w = w_{\text{mess}} + R; \quad R \in [-1, 1] \quad (3.28)$$

In Abbildung 3.16 ist im oberen Bild wieder die zeitliche Entwicklung des Radius, im mittleren die der Höhe und im unteren jetzt die der Übersättigung dargestellt. Diesmal gibt es keine Unterschiede zwischen der Kurve des Normalzustandes und der des verrauschten Zustandes.

Die Entwicklung des Tropfenspektrums bestätigt diese Aussage (Abbildung 3.17). Die Tropfenspektren sind zu jedem Zeitpunkt identisch mit denjenigen unter Normalbedingungen.

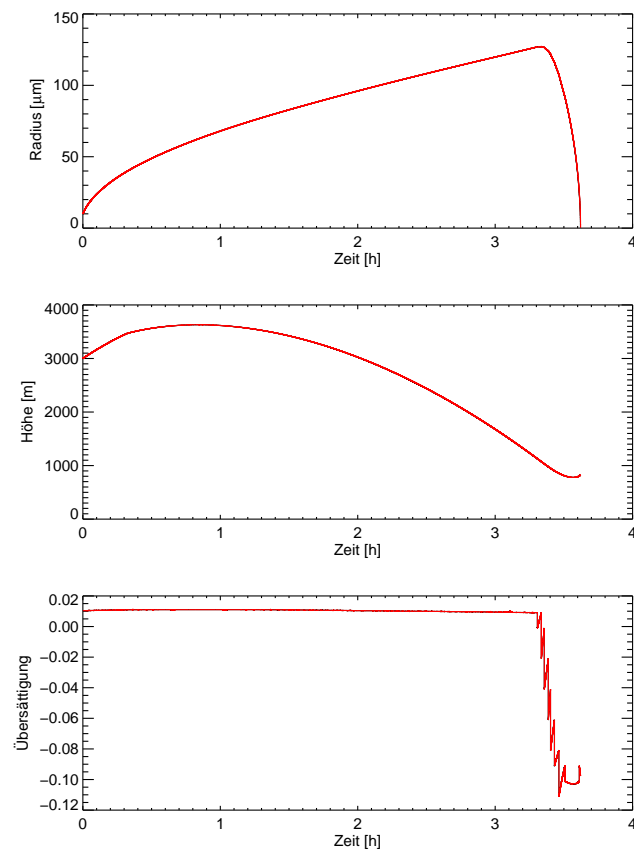


Abbildung 3.16: zeitlicher Verlauf der Tropfeneigenschaften bei einer Variation des Aufwindes um $\pm 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, Vergleich zwischen Normalbedingungen (schwarze Kurven) und verrauschtem Zustand (rote Kurven)

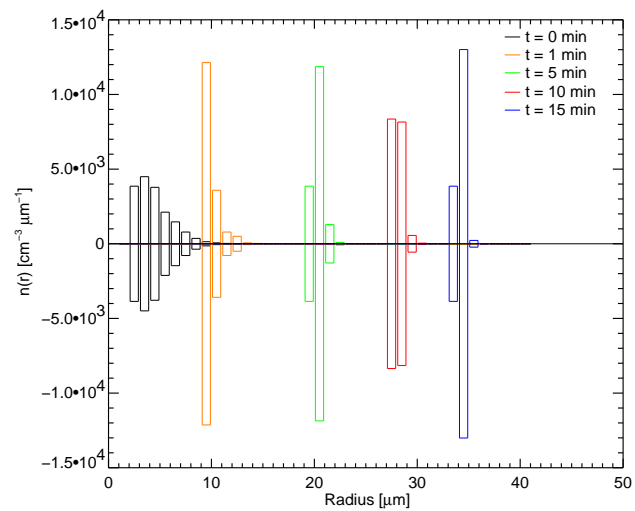


Abbildung 3.17: Entwicklung der Tropfenspektren für eine Variation des Aufwindes um $\pm 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und invers die Entwicklung der Tropfenspektren unter Normalbedingungen

Die Beschränkung auf einen einzelnen variablen Parameter gibt die natürliche Variabilität der Atmosphäre nicht richtig wieder. Deshalb erfolgt nun die Kopplung aller drei Einflussnahmen.

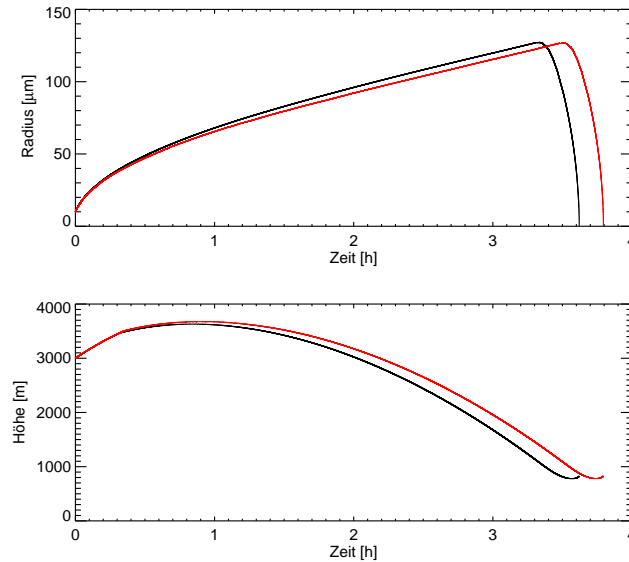


Abbildung 3.18: zeitlicher Verlauf der Tropfeneigenschaften bei einer Variation der Temperatur um $\pm 2 \text{ K}$, der spezifischen Feuchte um $\pm 1 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$ und des Aufwindes um $\pm 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, Vergleich zwischen Normalbedingungen (schwarze Kurven) und verrauschtem Zustand (rote Kurven)

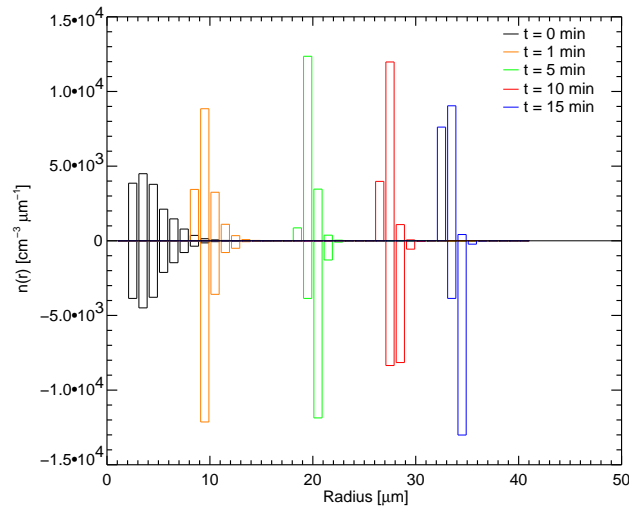


Abbildung 3.19: Entwicklung der Tropfenspektren für eine Variation der Temperatur um $\pm 2 \text{ K}$, der spezifischen Feuchte um $\pm 1 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$ und des Aufwindes um $\pm 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und invers die Entwicklung der Tropfenspektren unter Normalbedingungen

In Abbildung 3.18 erfolgt eine Beschränkung auf die Darstellung der zeitlichen Entwicklung des Tropfenradius und der Tropfenhöhe, da sowohl die Übersättigung als auch der Aufwind aufgrund der Beeinflussung die vorgegebene starke Variabilität zeigen.

Der Vergleich des Tropfenwachstum mit dem unter Normalbedingungen zeigt ein langsames Wachstum und damit verbunden ein Vordringen des Tropfens in größere Höhen. Es treten im Wesentlichen die gleichen Änderungen im Verhalten des Tropfens auf, wie bei einer reinen Verrauschung der Temperatur.

Dies bestätigt auch die Betrachtung der zeitlichen Entwicklung des Tropfengrößenspektrums (Abbildung 3.19). So befinden sich zu den entsprechenden Zeitpunkten die Maxima bei kleineren Tropfenradien.

Bei dieser Art der Variation der Umgebungsparameter wird also der stärkste Einfluss auf das Tropfenwachstum durch eine Variation der Temperatur hervorgerufen. Bei beiden anderen Größen erfolgt nur eine minimale bzw. keine Einflussnahme. Lediglich an der Entwicklung des Tropfenspektrums werden kleine Unterschiede deutlich, die aufgrund der diskreten Einteilung der Tropfen auftreten. Die Kombination aller drei Variationen ergibt dann wieder die Auswirkungen für eine Variation der Temperatur.

Eine Begründung für diese Einflussnahme kann gefunden werden, wenn das Tropfenwachstum (linke Seite von Gleichung 3.15) in Abhängigkeit der Temperatur bzw. der spezifischen Feuchte betrachtet wird.

In Abbildung 3.20 ist das diffusive Tropfenwachstum in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt. Die schwarze Kurve beschreibt dieses Verhalten, während die rote Kurve deren Regression zeigt. Mit den beiden blauen Linien wird der Bereich eingegrenzt, in dem die Temperatur variiert (zwischen -2 und -6 °C). Beide Kurven weichen in diesem Intervall etwas voneinander ab, so dass ein leichtes nichtlineares Verhalten der Temperatur diagnostiziert werden kann. Dadurch ergibt sich auch das langsamere Tropfenwachstum bei verrauschten Bedingungen. Zum Vergleich ist in Abbildung 3.21 der gleiche Sachverhalt in Abhängigkeit der relativen Feuchte dargestellt. Diese variiert zwischen 3.5 und $5.5 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$. Der Vergleich zwischen der Originalkurve und deren Regression zeigt keinerlei Unterschiede, so dass es sich hierbei um ein lineares Verhalten handelt. D.h. die zeitliche Entwicklung des Tropfens wird im Wesentlichen durch die leicht nichtlineare Temperaturabhängigkeit des Tröpfchenwachstums bestimmt.

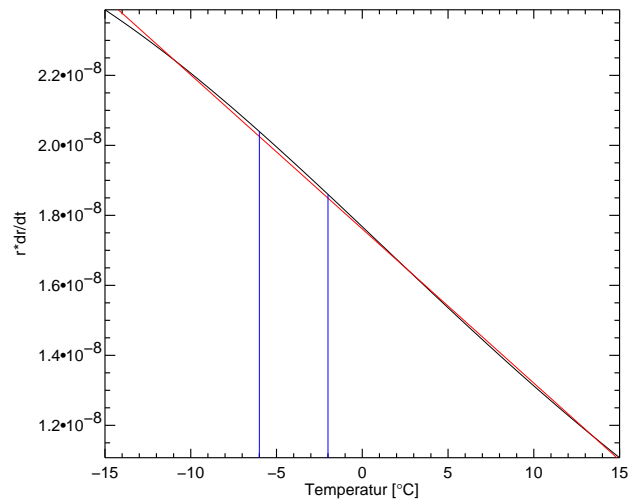


Abbildung 3.20: Verhalten des Diffusionswachstums als Funktion der Temperatur (schwarze Kurve), Regression (rote Kurve), blaue Linien kennzeichnen den Bereich der Temperaturvariation

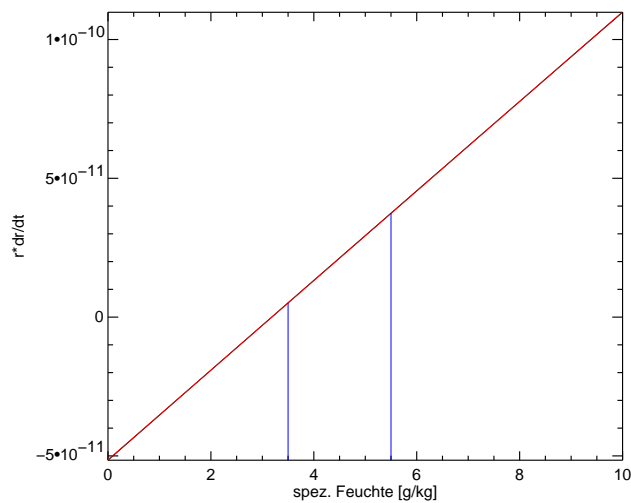


Abbildung 3.21: Verhalten des Diffusionswachstums als Funktion der spezifischen Feuchte (schwarze Kurve), Regression (rote Kurve), blaue Linien kennzeichnen den Bereich der Feuchtevariation

In der Realität erfolgt die Variabilität der Atmosphäre auf längeren Zeitskalen. So ist es unrealistisch, dass im einen Zeitschritt eine Verstärkung während im nächsten eine Dämpfung stattfindet. Deshalb wurde nun ein autoregressiver Prozess (AR-Prozess) auf das Rauschen selber angewendet.

Ein AR-Prozess p -ter Ordnung (AR(p)) wird allgemein beschrieben durch (von Storch und Zwiers (1997)):

$$y(t) = \sum_{j=1}^p \alpha_j y(t-j) + \alpha_0 + r(t) \quad (3.29)$$

Dabei handelt es sich um einen Wert $y(t)$ der Zeitreihe, der durch Bezug auf einen gewichteten vorhergehenden Wert und einen unsystematischen Einfluss $r(t)$ variiert wird. Der Unterschied zur vorhergehenden Betrachtung ist der, dass nun zusätzlich der letzte Wert berücksichtigt wird. Damit wird die Tendenz innerhalb der Variabilität längerfristig. In dieser Untersuchung erfolgt eine Beschränkung auf einen AR(1)-Prozess, d.h.

$$y(t) = \alpha_0 + \alpha_1 * y(t-1) + r(t) \quad (3.30)$$

Die Koeffizienten α_0 und α_1 sind $\alpha_0 = 0$, d.h. es liegt keine Grundstörung vor, die zu einer Tendenz führt, und $\alpha_1 = 0.5$, d.h. der vorhergehende Wert wird zur Hälfte mit berücksichtigt. Die Beschränkung auf einen AR(1)-Prozess reicht aus, da keine Störung in eine Richtung vorgegeben werden soll.

Dieser Prozess wird nun auf das Rauschen angewendet. Betrachtet wird allerdings lediglich noch eine Variation der Temperatur, da nur durch diese beim unbeeinflussten Rauschen Auswirkungen auf die Tropfeneigenschaften festgestellt werden konnten.

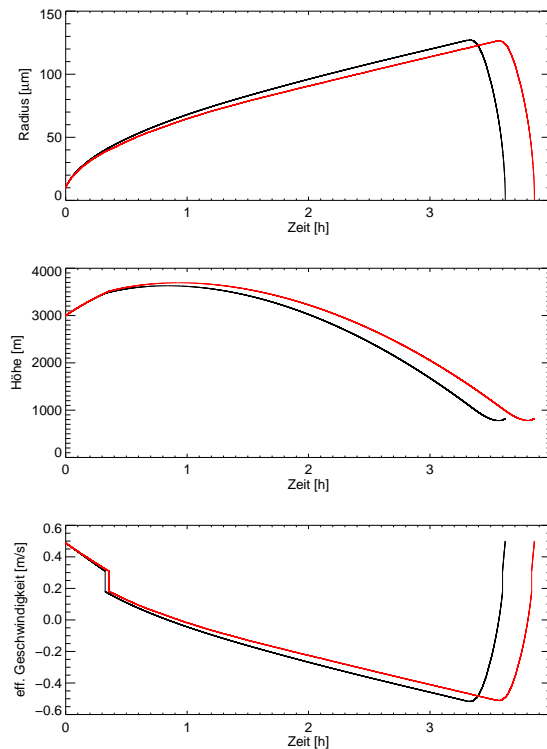


Abbildung 3.22: zeitlicher Verlauf der Tropfeneigenschaften bei einer Variation der Temperatur um ± 2 K mittels AR(1)-Prozess auf den Rauscheinfluss, Vergleich zwischen Normalbedingungen (schwarze Kurven) und verrauschtem Zustand (rote Kurven)

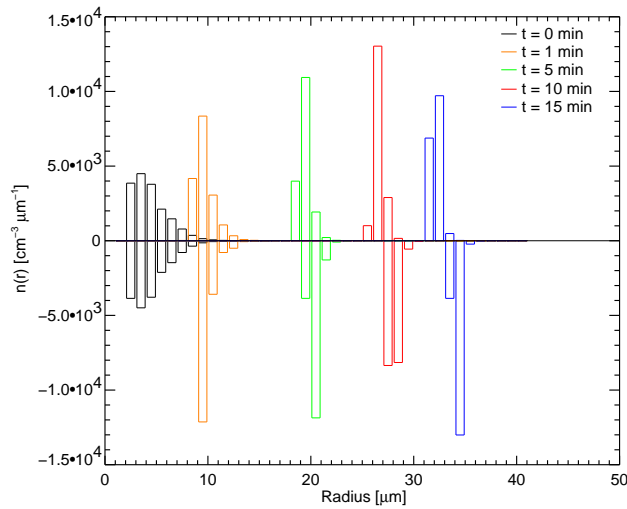


Abbildung 3.23: Entwicklung der Tropfenspektren für eine Variation der Temperatur um ± 2 K mittels AR(1)-Prozess auf den Rauscheinfluss

Abbildung 3.22 zeigt den Vergleich zwischen dem Normalzustand und dem Zustand in dem T um ± 2 K verrauscht wurde, d.h.

$$T = T_{\text{mess}} + R; \quad R \in [-2, 2] \quad (3.31)$$

R ergibt sich mit Hilfe des AR(1)-Prozesses.

Dargestellt ist wieder im oberen Bild die zeitliche Entwicklung des Tropfenradius, im mittleren der Höhe und im unteren der effektiven Geschwindigkeit. Es gibt auch in diesem Fall deutliche Unterschiede zwischen den beiden Fällen. Der Tropfen, der sich in einer verrauschten Umgebung befindet wächst deutlich langsamer gegenüber dem unter Normalbedingungen. Das spiegelt sich entsprechend, aufgrund des höheren Aufwindes, auch in der Höhe wieder. Es treten also bei dieser Variation dieselben Auswirkungen auf, wie vorher. Die Wolke wird insgesamt mächtiger bei gleichzeitig langsameren Tropfenwachstums. Dieses führt bei der Entwicklung des Tropfenspektrums zu einer langsameren Abnahme der Breite gegenüber dem Normalzustand. Das Tropfenspektrum erstreckt sich also zu einem vorgegebenen Zeitpunkt über mehr Größenbereiche und damit zusammenhängend erfolgt eine starke Abnahme der Maxima (Abbildung 3.23).

Eine Änderung der Temperatur hat also in diesem Fall identische Auswirkungen auf das Tropfenwachstum wie bei einem unabhängigen Rauschen. Die Begründung ist entsprechen dem einer einfachen Rauschüberlagerung.

Kapitel 4

Tropfenwachstum durch Koaleszenz

Solange ein Tropfen alleine durch Kondensation wächst dauert die Bildung großer Tropfen lange. Außerdem führt Kondensationswachstum zu einer Verengung des Tropfenspektrums. Für die Entstehung von Niederschlag werden aber große Tropfen benötigt, die auf ihrem Weg aus der Wolke nicht komplett verdunsten. D.h. es gibt weitere Prozesse, die das Tropfenwachstum beeinflussen.

In diesem Kapitel werden deshalb zusätzlich die Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Tropfen berücksichtigt. Dabei spielt der Stoß zwischen zwei Tropfen eine wesentliche Rolle, da nach einem Stoß durch verschmelzen der Stoßpartner schnell große Tropfen gebildet werden können. Allgemein betrachtet handelt es sich bei einem Stoß um ein Vielkörperproblem. Allerdings ist innerhalb einer Wolke die Tropfenkonzentration gering genug, so dass eine Beschränkung auf zwei Interaktionspartner gerechtfertigt ist (Maxerath (1984)). Nach einer erfolgten Kollision gibt es für die beteiligten Tropfen mehrere Möglichkeiten. Sie können miteinander verschmelzen, sich abstoßen oder zerplatzen. In diesem Abschnitt soll lediglich das Verschmelzen berücksichtigt werden. Die Kombination aus Kollision und Koaleszenz (Verschmelzen) wird mit Koagulation bezeichnet.

4.1 kontinuierliches Koagulationsmodell

Das kontinuierliche Koagulationsmodell berücksichtigt den diskreten Charakter des Tröpfcheneinfangs nicht. Das Wachstum wird als kontinuierlicher Prozess verstanden. Außerdem wird schon zu Beginn von zwei monodispersen Tropfenpopulationen ausgegangen, die sich aufgrund ihrer Größe in das entsprechende Schicksal fügen, d.h. der große Tropfen wächst auf Kosten des kleineren („Räuber-Beute-Prinzip“).

4.1.1 Theorie

Um Aussagen über das Wachstum des großen Tropfen treffen zu können, muss zuerst betrachtet werden, in welchem Volumen er wie viele Tropfen einsammeln kann.

Das maximale Volumen einer Luftsäule, dass der große Tropfen während des Falles pro

Zeiteinheit durchlaufen kann, ergibt sich durch:

$$V = \pi * (R + r)^2 |v(R) - v(r)| \quad (4.1)$$

mit: $v(R)$, $v(r)$ = Fallgeschwindigkeit der großen bzw. kleinen Tropfen

Lediglich innerhalb dieses durchquerten Volumens kann eine Kollision zwischen großen und kleinen Tropfen stattfinden, wobei sich die Anzahl der eingefangenen Tröpfchen pro Größenklasse mittels

$$N = E_{\text{koag}}(R, r) \pi (R + r)^2 |v(R) - v(r)| n(r) dr \quad (4.2)$$

ergibt. Mit: $n(r)$ = Größenverteilung und $E_{\text{koag}}(R, r)$ = Koagulationseffizienz

Es ergibt sich also für den großen Tropfen eine Volumenänderung entsprechend:

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^\infty E_{\text{koag}}(R, r) \pi (R + r)^2 |v(R) - v(r)| \frac{4}{3} \pi r^3 n(r) dr \quad (4.3)$$

Zur Bestimmung der Änderung des Tropfenradius, wird das Volumen mittels Gleichung 4.4 durch den Radius ersetzt.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = 4 \pi R^2 \frac{dR}{dt} \quad (4.4)$$

Dies in Gleichung 4.3 eingesetzt ergibt:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\pi}{3} \int_0^\infty \left(\frac{R + r}{R} \right)^2 |v(R) - v(r)| n(r) r^3 E_{\text{koag}}(R, r) dr \quad (4.5)$$

Diese Gleichung beschreibt nun das Wachstum eines Tropfens durch Koagulation.

Der Term

$$K(R, r) \equiv \pi (R + r)^2 |v(R) - v(r)| E_{\text{koag}}(R, r) \quad (4.6)$$

wird mit Koagulationskoeffizient bezeichnet. Er ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Tropfen R und r durch Kollision und Koaleszenz zu einem Tropfen verschmelzen.

Die Koagulationseffizienz ergibt sich aus dem Produkt von Kollisionseffizienz und Koaleszenzeffizienz.

$$E_{\text{koag}}(R, r) = E_{\text{koll}}(R, r) * E_{\text{koal}}(R, r) \quad (4.7)$$

Dabei ist E_{koll} die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Tropfen im betrachteten Volumen miteinander kollidieren. $E_{\text{koal}}(R, r)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Tropfen nach der Kollision verschmelzen. Zur Bestimmung von $E_{\text{koag}}(R, r)$ gibt es keine theoretischen Lösungen, deshalb erfolgt eine Beschränkung auf experimentelle Messergebnisse. Bei einer Messung ist es allerdings schwierig zu unterscheiden, wann die Tropfen kollidiert und wann sie verschmolzen sind. Deshalb wird angenommen, dass aus jeder Kollision zweier Tropfen ein neuer entsteht, d.h. $E_{\text{koal}}(R, r) = 1$.

Es bleibt also die Bestimmung von $E_{\text{koll}}(R, r)$ übrig. Diese wird anhand Abbildung 4.1 erläutert. Dort ist der Kollisionsprozess zweier Tropfen dargestellt und zwar links mit Be-

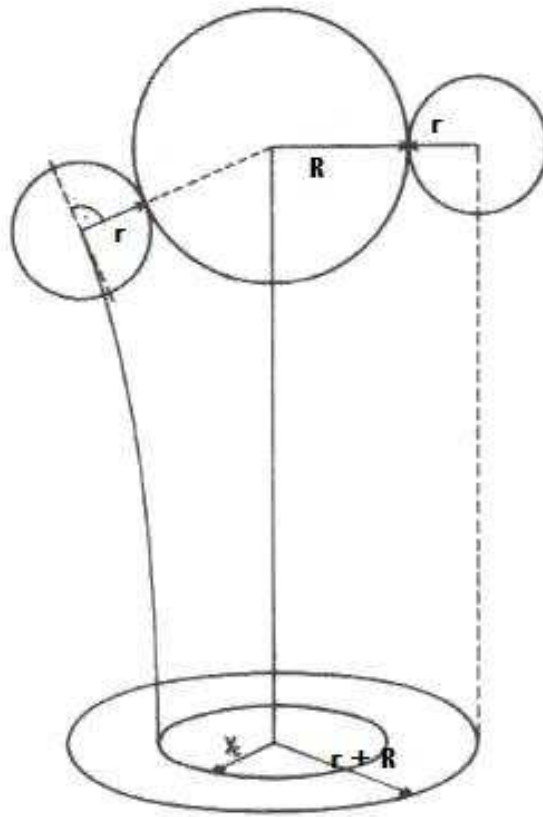


Abbildung 4.1: Tropfeneinfang durch Kollision (aus Maxerath (1984))

rücksichtigung der hydrodynamischen Wechselwirkung und rechts ohne. Es wird deutlich, dass nicht jeder kleinere Tropfen mit dem größeren kollidiert. Dies liegt an den Strömungseigenschaften der Luft. Der Trajektorienverlauf der beiden Tropfen ist nicht parallel, sondern die kleineren Tropfen erfahren eine Ablenkung. D.h. beide Tropfen versuchen einander auszuweichen. Kollision kann deshalb nur zwischen zwei Tropfen stattfinden, deren Mittelpunkte sich zu Beginn innerhalb eines Zylinders mit Radius y_c befanden. Die Kollisionseffizienz ist definiert als das Verhältnis des wahren Kollisionsquerschnitts πy_c^2 zum geometrischen Kollisionsquerschnitt $\pi (R + r)^2$.

$$E_{\text{koll}} = \frac{y_c}{(R + r)^2} < 1 \quad (4.8)$$

Für die Kollisionseffizienz kann in 1. Näherung

$$E_{\text{koll}} = \frac{p^2}{2(1+p)^2}; \quad p = \frac{r}{R} \quad (4.9)$$

eingesetzt werden.

Eine andere Variante zur Behandlung der Kollisionseffizienz in Gleichung 4.5 besteht darin, die Messwerte entsprechend einzusetzen. In Tabelle 4.1 stammen die Daten für $R < 50 \mu\text{m}$ von Klett und Davis (1973), für $50 \mu\text{m} \leq R \leq 500 \mu\text{m}$ von Beard und Ochs (1984) und für $R > 500 \mu\text{m}$ von Mason (1971).

R [μm]	r [μm]								
	2	3	4	6	8	10	15	20	25
10	0.017	0.027	0.037	0.052	0.052				
20	*	0.016	0.027	0.060	0.12	0.17	0.17		
30	*	*	0.020	0.13	0.28	0.37	0.54	0.55	0.47
40	*	*	0.020	0.23	0.40	0.55	0.70	0.75	0.75
50	-	-	0.030	0.30	0.40	0.58	0.73	0.75	0.79
60	-	0.010	0.13	0.38	0.57	0.68	0.80	0.86	0.91
80	-	0.085	0.23	0.52	0.68	0.76	0.86	0.92	0.95
100	-	0.14	0.32	0.60	0.73	0.81	0.90	0.94	0.96
150	0.025	0.25	0.43	0.66	0.78	0.83	0.92	0.95	0.96
200	0.039	0.30	0.46	0.69	0.81	0.87	0.93	0.95	0.96
300	0.095	0.33	0.51	0.72	0.82	0.87	0.93	0.96	0.97
400	0.098	0.36	0.51	0.73	0.83	0.88	0.93	0.96	0.97
500	0.10	0.36	0.52	0.74	0.83	0.88	0.93	0.96	0.97
600	0.17	0.40	0.54	0.72	0.83	0.88	0.94	0.98	†
1000	0.15	0.37	0.52	0.74	0.82	0.88	0.94	0.98	†
1400	0.11	0.34	0.49	0.71	0.83	0.88	0.94	0.95	†
1800	0.08	0.29	0.45	0.68	0.80	0.86	0.96	0.94	†
2400	0.04	0.22	0.39	0.62	0.75	0.83	0.92	0.96	†
3000	0.02	0.16	0.33	0.55	0.71	0.81	0.90	0.94	†

- Kollisionseffizienz kleiner 0.01

* keine genaue Bestimmung aus vorhandenen Daten

† Wert nah an 1

Tabelle 4.1: Kollisionseffizienz $E_{\text{coll}}(R, r)$ für Tropfen mit Radius R kollidierend mit Tropfen mit Radius r (aus Rogers und Yau (1989))

4.1.2 Auswertung

4.1.2.1 Entwicklung eines einzelnen Tropfens

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie sich die Tropfengröße eines einzelnen Tropfens nach Gleichung 4.5 entwickelt. Alle Betrachtungen wurden für beide Varianten der Kollisionseffizienz durchgeführt. Dazu wird ein Tropfen mit anfänglichem Radius $R = 10 \mu\text{m}$ bei einer Starthöhe von 3 km und einem Aufwind von $0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ betrachtet. Das vorgegebene Tropfenspektrum entspricht demjenigen aus Abbildung 3.4.

Abbildung 4.2 zeigt in den beiden oberen Bildern die zeitliche Entwicklung des Tropfen-

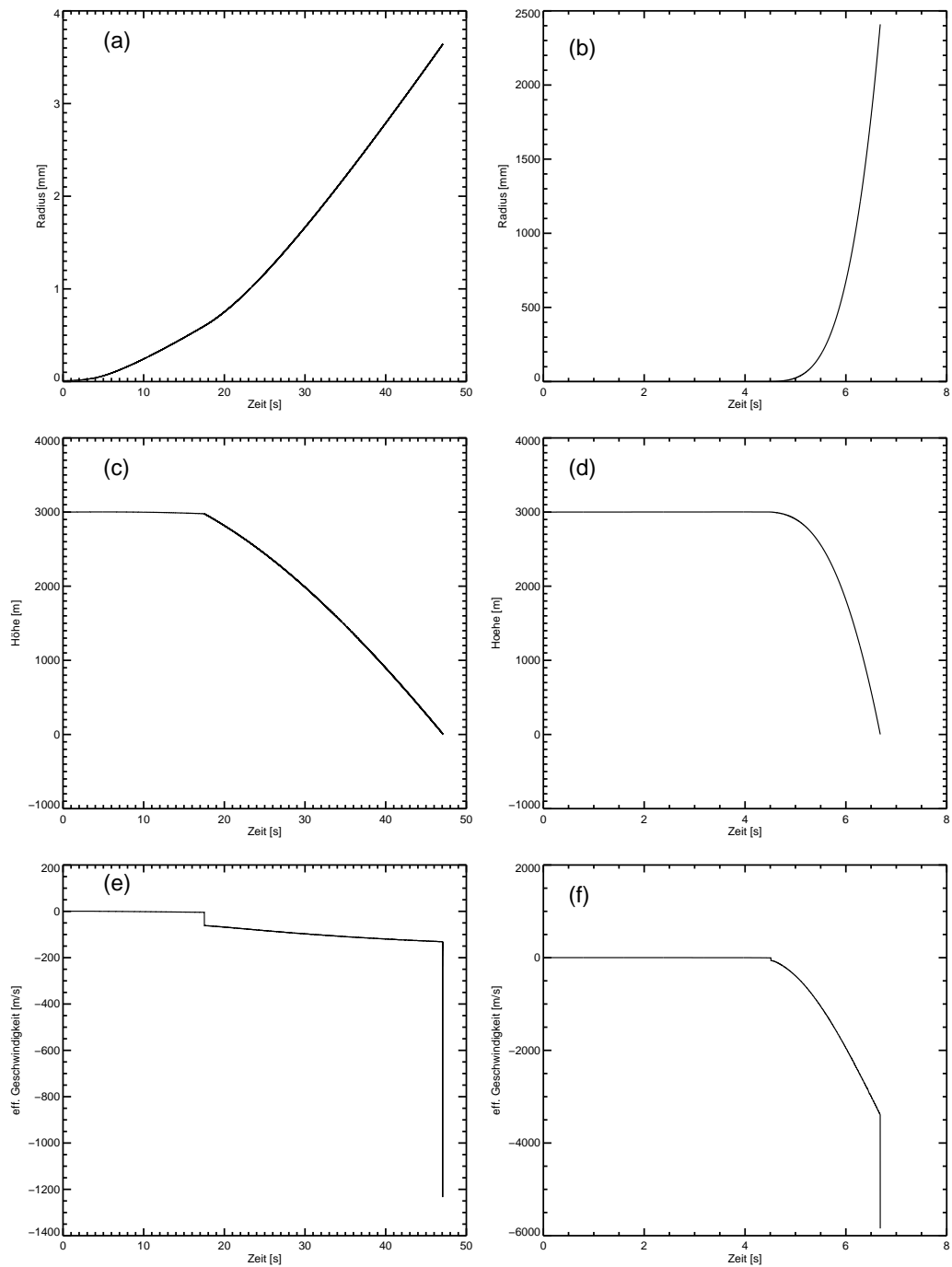


Abbildung 4.2: Tropfenwachstum durch Koagulation, links: Werte nach Gleichung 4.9, rechts: Werte aus Tabelle 4.1 für Kollisionseffizienz

radius, in den mittleren der Höhe und in den unteren der effektiven Geschwindigkeit. Diese berechnet sich wieder aus der Differenz zwischen Aufwind und Fallgeschwindigkeit. In den linken Bildern ist die Kollisionseffizienz nach Gleichung 4.9 berücksichtigt worden und in den rechten Bildern stammt sie aus Tabelle 4.1. Der Tropfen wächst sehr

schnell bis auf eine Größe von einigen mm. Gleichzeitig ist der vorgegebene Aufwind mit $0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ zu gering, um die Fallgeschwindigkeit des Tropfen zu überwinden und ihn in größere Höhen zu bringen. Erst nach Überschreiten eines bestimmten Radius erfolgt eine nennenswerte Höhenänderung. Ab diesem Punkt dominiert der Tropfen mit seiner Fallgeschwindigkeit die effektive Geschwindigkeit, d.h. es kommt zu einer Abwärtsbewegung des Tropfen. Beim Vergleich der linken mit der rechten Seite kann grob der gleiche Sachverhalt beobachtet werden. Allerdings fällt auf, dass rechts das Tropfenwachstum und damit verbunden die Änderung der effektiven Geschwindigkeit und der Höhe deutlich schneller erfolgt. Außerdem wird der Tropfen sehr viel größer. Der Grund liegt in der in diesem Fall größeren Kollisionseffizienz. Es besteht also eine deutlich höhere Wahrscheinlichkeit für Kollision zwischen zwei Tropfen. Dementsprechend wächst der größere Tropfen auch schneller auf Kosten des kleineren.

4.1.2.2 Entwicklung eines Tropfenensembles

Hier soll das Verhalten einer kompletten Tröpfchenpopulation anhand Gleichung 4.5 untersucht werden. Dazu wird für jeden Tropfen einer gemessenen Verteilung (Abbildung 3.4 die Gleichung 4.5 gelöst. Dargestellt ist in Abbildung 4.3 die zeitliche Entwicklung

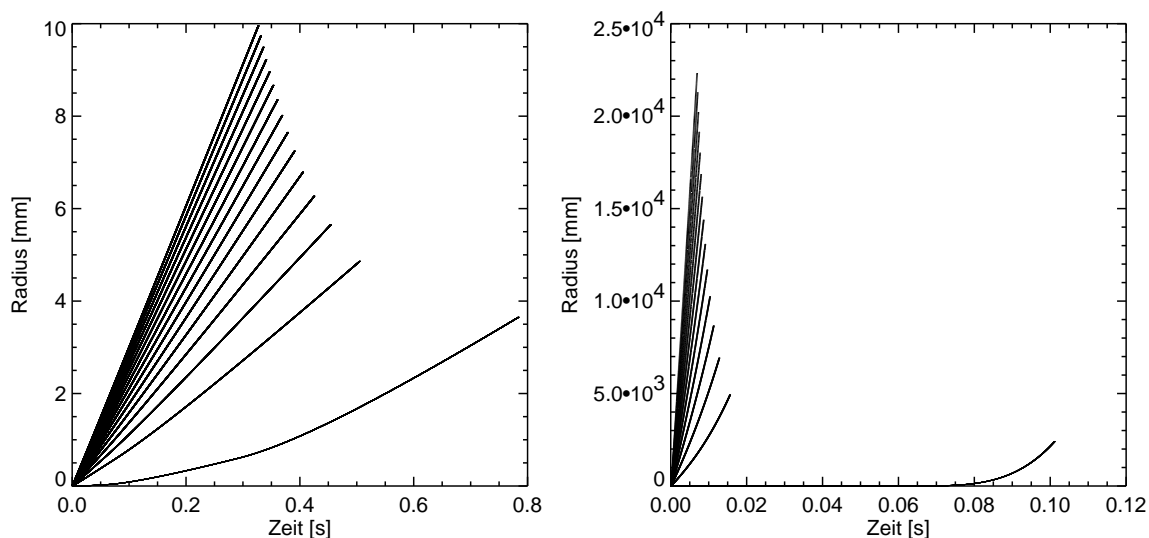


Abbildung 4.3: Tropfenwachstum einer kompletten Tropfenpopulation durch Koagulation, links: Werte nach Gleichung 4.9, rechts: Werte aus Tabelle 4.1 für Kollisionseffizienz

des Tropfenradius. Die beiden Abbildungen unterscheiden sich wieder durch die verschieden gewählte Kollisionseffizienz (links nach Gleichung 4.9 und rechts aus Tabelle 4.1). Beide Bilder zeigen einen ähnlichen Verlauf. Der Unterschied besteht auch hier in der Wachstumszeit. Die Steigung der Kurven nimmt mit größerem Anfangsradius zu. Bis auf den Tropfen mit dem kleinsten Startradius verlaufen alle Wachstumskurven parallel. Damit ergibt sich bei dieser Wachstumsform ein deutlich breiteres Spektrum gegenüber dem Ausgangsspektrum.

Durch Koagulation werden also innerhalb kürzester Zeit große Tropfen gebildet. Außerdem weitet sich das Spektrum. D.h. ein Tropfenspektrum, welches sich nach diesen Kriterien entwickelt, ist zur Bildung von Niederschlag geeignet. Allerdings wird hier vorausgesetzt, dass schon zu Beginn zwei Tropfenspektren vorhanden sind, die sich aufgrund ihrer Größe in das entsprechende Schicksal begeben. Realistischer ist allerdings die Annahme eines einzelnen Tropfenspektrums, in dem es erst durch Koagulation zur Bildung großer Tropfen kommt (Telford (1955)).

4.2 stochastisches Koaleszenzmodell

In diesem Abschnitt soll nun der diskrete Charakter des Tröpfcheneinfangs berücksichtigt werden. Dazu wird zu Beginn eine polydisperse, also ausgedehnte Tropfenpopulation angenommen. Durch zufällige Koagulationsprozesse bilden sich nun nach einiger Zeit etwas größere Tropfen. Diese können dann wieder auf Kosten der kleineren Tropfen wachsen. Das Spektrum verändert also vollständig seine Gestalt. Der Unterschied zum vorher betrachteten Koagulationswachstum besteht in der Betrachtung einer kompletten Tröpfchenpopulation und nicht nur in der Entwicklung eines einzelnen Tropfens.

4.2.1 Theorie

Hergeleitet werden soll in diesem Abschnitt nun eine Gleichung für die zeitliche Entwicklung eines Tropfenspektrums (Pruppacher und Klett (1997)). Der Einfang eines Trop-

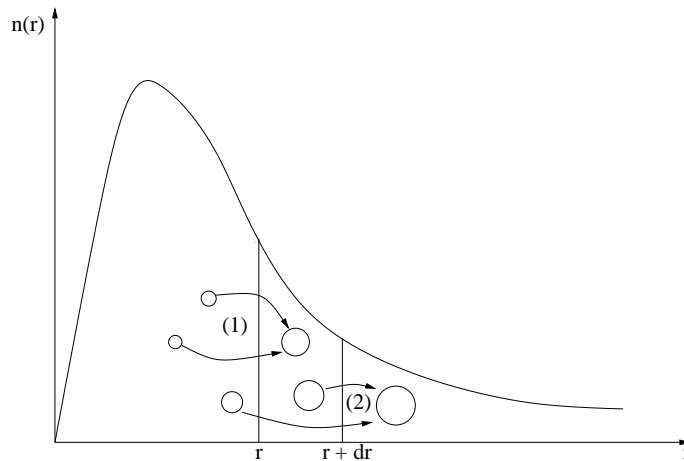


Abbildung 4.4: Veranschaulichung stochastische Koaleszenzgleichung

fens mit Radius r durch einen Tropfen mit Radius R wird durch den Koagulationskoeffizienten (Gleichung 4.6) beschrieben. Dieser ist symmetrisch, so dass mit r nicht unbedingt der kleinere bzw. mit R der größere Tropfen bezeichnet wird. Betrachtet wird die Änderung innerhalb des Intervalls $[r, r+dr]$. In Abbildung 4.4 sind schematisch die möglichen Prozesse dargestellt. So kann die Anzahl der Tröpfchen $n(r)dr$ im Größenbereich

$[r, r + dr]$ entweder durch Beteiligung an Koagulationsprozessen abnehmen (Abbildung 4.4, (2)) oder durch das Verschmelzen kleinerer Tröpfchen in diesen Größenbereich hinein wachsen (Abbildung 4.4, (1)).

Für Tröpfchen aus $[r, r + dr]$ gibt es maximal die Möglichkeit zu

$$n(r) dr \int_0^\infty K(R, r) n(R) dR \quad (4.10)$$

Kollisionen. Dieser Term stellt innerhalb der stochastischen Koaleszenzgleichung einen „Verlust“ dar, da die Anzahl der Tropfen durch Kollision von Tropfen r mit anderen abnimmt.

Die Anzahl von Kollisionen kleinerer Tröpfchen $r - r'$ mit r' beträgt:

$$\frac{1}{2} dr \int_0^r K(r - r', R) n(r - r') n(r') dr' \quad (4.11)$$

Durch den Faktor $\frac{1}{2}$ wird vermieden, dass gleiche Kollisionen zweimal berücksichtigt werden. Dieser Term stellt innerhalb der stochastischen Koaleszenzgleichung einen „Gewinn“ dar, da der Zuwachs von Tropfen r durch Kollision von Tropfen $r - r'$ mit Tropfen r' hervorgerufen wird. Die zeitliche Änderung der Tropfenpopulation ergibt sich aus der Kombination von Gleichung 4.10 und Gleichung 4.11.

$$\frac{\partial}{\partial t} n(r) dr = \frac{1}{2} dr \int_0^r K(r - r', R) n(r - r') n(r') dr' - n(r) dr \int_0^\infty K(R, r) n(R) dR \quad (4.12)$$

Diese Gleichung wird als stochastische Koaleszenzgleichung bezeichnet.

Numerische Integration führt zur zeitlichen Entwicklung des Größenspektrums $(n(r, t))$ durch wechselseitige Kollisionsprozesse aller Tröpfchen.

4.2.1.1 Numerische Lösung der stochastischen Koaleszenzgleichung

Für die numerische Lösung von Gleichung 4.12 wird diese Gleichung diskretisiert und durch Differenzen dargestellt, d.h.

$$n_{j,t+\Delta t} = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{j-1} K_{i,j-1} n_i n_{j-i} - n_j \sum_{i=1}^N K_{ij} n_i \right) \Delta t + n_{j,t} \quad (4.13)$$

Mit n_i wird die Tropfenkonzentration des entsprechenden Tropfens bezeichnet. Diese ergibt sich aus einer vorgegebenen Tropfengrößenverteilung (Abbildung 3.4). Mit den vorhandenen Radien wird dann der Koagulationskoeffizient (Gleichung 4.6) berechnet. Anschließend wird die zeitliche Entwicklung der Größenverteilung bestimmt, indem Gleichung 4.13 für jeden Tropfen gelöst wird.

4.2.1.2 Monte-Carlo Lösung der stochastischen Koaleszenzgleichung

Durch einfache Integration von Gleichung 4.12 ergibt sich lediglich eine Lösung für ein mittleres Größenspektrum $\overline{n(r)}$. In einem realen Spektrum gibt es zusätzliche Einflussnahme auf das Tropfenwachstum. So ist die Luftbewegung innerhalb einer Wolke turbulent, aufgrund z.B. der durch Kondensation und Strahlungsauskuhlung initiierten Konvektionsprozesse. Diese ungeordneten Bewegungen können das Tropfenwachstum auf

zweierlei Art und Weise beeinflussen. Die Wahrscheinlichkeit für Tropfenkollision ist durch die verrauschte Bewegung erhöht, allerdings verlängert sich durch die turbulente Bewegung auch die Wegstrecke der Trajektorien eines Luftpaketes. In einem realen Spektrum gibt es also „Ausreißer“, je nach Einzelschicksal der Tropfen. Diese haben allerdings einen entscheidenden Anteil bei der Initialisierung von Niederschlag. Für die Bestimmung einer exakten Lösung der stochastischen Koaleszenzgleichung und ihrem verrauschen ist deshalb eine Monte-Carlo Simulation der Tropfen-Tropfen Wechselwirkung geeignet (Gillespie (1975)).

Bei dieser Methode wird eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für eine Koagulation bestimmt und durch Ziehung von Zufallszahlen reproduziert. Mehrmaliges wiederholen ergibt eine zeitliche Entwicklung des Größenspektrums. Ausgangspunkt für die weitere Betrachtung ist eine Tropfenpopulation mit N Größenklassen $i = 1, \dots, N$. Jede Größenklasse ist z.B. charakterisiert durch das Volumen V_i . Entsprechend dieser Annahme kann der Koagulationskoeffizient (Gleichung 4.6) $K(R, r)$ als K_{ij} geschrieben werden. Damit ergibt sich $A_{ij} = K_{ij}/V$ die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Tropfen i und j miteinander koaglieren. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $P(\tau, i, j)$ für Koagulation berechnet sich aus dem Produkt von: (1). Wahrscheinlichkeit (P_1), dass kein Tropfen innerhalb des Zeitintervalls $[t, t + \tau]$ koaliert, (2). Wahrscheinlichkeit (P_2), dass zwei Tropfen i und j genau im Zeitintervall $[t + \tau, t + \tau + d\tau]$ miteinander koalieren und (3). Wahrscheinlichkeit (P_3), dass keine weiteren Tropfen in demselben Zeitintervall koalieren.

Für die Berechnung von P_1 wird das Zeitintervall $[t, t + \tau]$ in m Teilintervalle mit Intervallbreite $\delta = \tau/m$ zerlegt. Falls $\delta \ll \tau$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass i und j in diesem Teilintervall nicht verschmelzen $(1 - A_{ij}\delta)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Tropfenpaare nicht miteinander verschmelzen ergibt sich aus dem Produkt aller möglichen Einzelwahrscheinlichkeiten. Dies gilt aber zunächst nur für ein Teilintervall und muss m -mal miteinander multipliziert werden, um für das komplette Zeitintervall $[t, t + \tau]$ zu gelten.

$$P_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\prod_{k=1}^{N-1} \prod_{l=k+1}^N 1 - A_{kl}\tau/m \right]^m \quad (4.14)$$

Der Limes tritt beim Übergang zu kleinen Teilintervallen auf, er kann in die Produkte gezogen werden und liefert dort die e-Funktion. Es ergibt sich somit ein Produkt von e-Funktionen bzw. die e-Funktion der Summe der Exponenten:

$$P_1 = \exp \left[- \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=k+1}^N A_{kl}\tau \right] \quad (4.15)$$

P_2 ergibt sich unmittelbar per Definition:

$$P_2 = A_{ij}d\tau \quad (4.16)$$

Entsprechendes gilt für P_3 :

$$P_3 = \prod_{k=1}^{N-1} \prod_{l=k+1}^N 1 - A_{kl}d\tau \quad (4.17)$$

$kl \neq ij$

Damit ergibt sich die gesamte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion durch:

$$P(\tau, i, j) = A_{ij} \exp \left[- \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=k+1}^N A_{kl} \tau \right] \quad (4.18)$$

gilt für: $0 \leq \tau < \infty$ und $1 \leq i < j \leq N$
sonst $P(\tau, i, j) = 0$

Existiert eine solche Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, so kann mit geeigneten Verfahren ein Tripel (τ, i, j) ausgewählt werden und ein Koagulationsprozess durchgeführt werden, der dann eine Änderung des Größenspektrums zur Folge hat.

Der Simulationsalgorithmus für das Monte-Carlo Schema sieht nun wie folgt aus (Abbildung 4.6), (Pruppacher und Klett (1997), Anhang 15.3.1.3):

Schritt 0: $t = 0$: Vorgabe einer Tropfengrößenverteilung für N Tropfen mit Volumen V_1, \dots, V_N . Bestimmung der $N(N-1)/2$ Werte für A_{kl} . Vorgabe von Stichprobenzeiten $t_1 < t_2 < \dots$ und einer Endzeit t_{stopp} .

Schritt 1: Würfeln eines Tripels (τ, i, j) , welches die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $P(\tau, i, j)$ erfüllt.

Schritt 2: $t = t + \tau$: Wegnahme von Tropfen i und j aus der Verteilung und entsprechendes Einfügen eines neuen Tropfens mit Volumen $(V_i + V_j)$. Neue Berechnung der Elemente von A_{kl} .

Schritt 3: Sobald eine der Stichprobenzeiten erreicht ist, Darstellung des aktuellen Größenspektrums. Wenn $t \geq t_{\text{stopp}}$ oder nur noch ein einzelner Tropfen vorhanden ist, Beendigung der Berechnung. Ansonsten weiter bei Schritt 1.

Nach der Durchführung dieses Algorithmuses von $t = 0$ bis $t = t_{\text{stopp}}$ hat sich eine Realisierung des stochastischen Koagulationsprozesses ergeben. Um ein statistisch komplettes Bild zu erhalten, müssen hinreichend viele dieser Realisierungen mit gleichen Startwerten durchgeführt werden.

Die Realisierung von Schritt 1 erfolgt analog zu Gillespie (1975) nach der „first-coalescence“ Methode. Dabei wird zuerst eine provisorische „Koaleszenzzeit“ τ_{kl} berechnet:

$$\tau_{kl} = A_{kl}^{-1} \ln \left(\frac{1}{r_{kl}} \right) \quad (4.19)$$

Bei r_{kl} handelt es sich um eine gleichverteilte Zufallszahl aus dem Intervall $[0,1]$ und $k = 1, \dots, N-1$; $l = k+1, \dots, N$.

Anschließend wird der kleinste Wert von $\tau_{kl} = \tau$ gesetzt und die entsprechenden $k, l = i, j$. Für das betrachtete Problem sieht die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für ein festes τ folgendermaßen aus. Ihre Form entspricht im Wesentlichen derjenigen der Koagulations-effizienz.

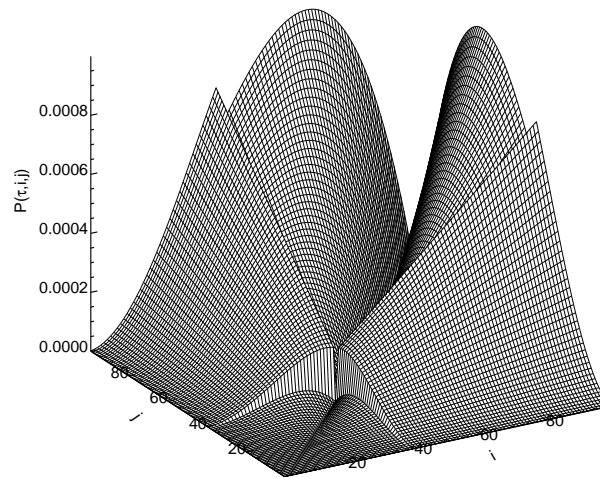


Abbildung 4.5: Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion,

$$P(\tau, i, j) = A_{ij} \exp \left[- \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=k+1}^N A_{kl} \tau \right] \text{ mit } \tau = 0.2594135 \text{ s}$$

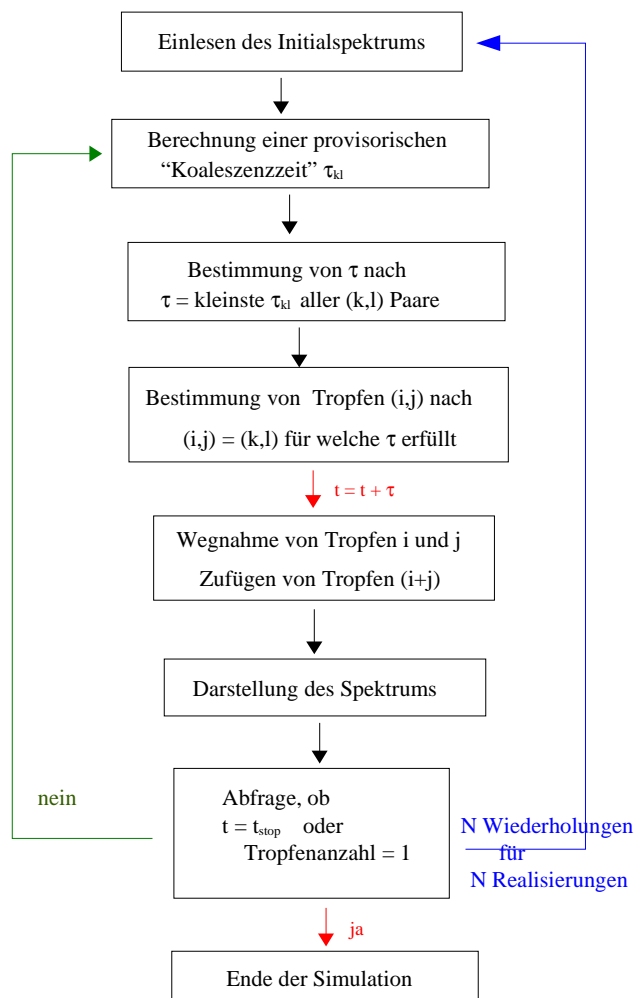


Abbildung 4.6: Schema des Monte-Carlo Simulations-Algorithmus

4.2.2 Auswertung

4.2.2.1 Lösung der stochastischen Koaleszenzgleichung durch numerische Integration

In diesem Abschnitt wird die zeitliche Entwicklung einer Tröpfchenpopulation betrachtet. Dabei wird eine gemessene Verteilung vorgegeben (Abbildung 3.4), und ihre Entwicklung nach Gleichung 4.13 berechnet. Es wird in diesem Fall für jeden Tropfen separat seine zeitliche Entwicklung betrachtet und anschließend zu einer gesamten zeitlichen Entwicklung des Tropfenspektrums zusammengesetzt. D.h. für sämtliche Kollisionsprozesse steht den Tropfen die Konzentration der ursprünglichen Verteilung zur Verfügung. Physikalisch bedeutet dies, dass der Wolke ständig neue kleine Tropfen zugeführt werden, z.B. durch Aktivierung neuer Tropfen im Aufwindbereich

Die zeitliche Entwicklung der Tropfengrößenverteilung (Abbildung 3.4) ist in Abbildung

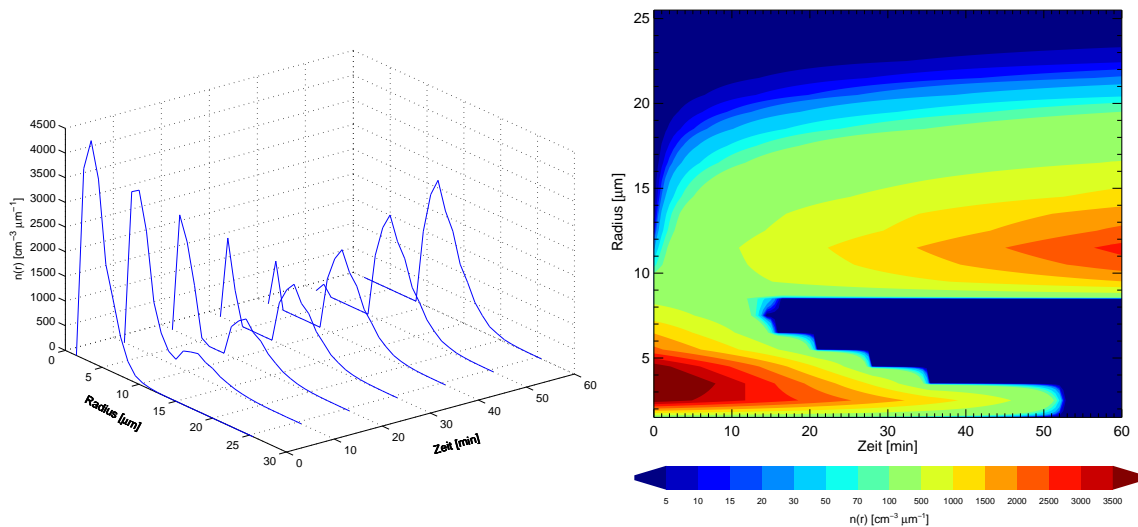


Abbildung 4.7: zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums anhand der stochastischen Koaleszenzgleichung, E nach Gleichung 4.9, links: Darstellung alle 10 min, rechts: Darstellung alle 30 s

4.7 dargestellt, wobei beide Bilder die gleiche Tropfenentwicklung zeigen. Allerdings ist in der rechten Grafik das Tropfenspektrum alle 30 s dargestellt, während dies in der linken nur alle 10 min erfolgt. Verwendet wurde hierbei die Kollisionseffizienz nach Gleichung 4.9. Durch Kollisionsprozesse kommt es bereits nach kurzer Zeit zur Bildung einer leichten Ausbuchtung im Bereich der größeren Tropfen. Diese verstärkt sich im weiteren Verlauf. Es kommt zur Bildung einer zweiten Tropfenpopulation (den so genannten „Räubertropfen“). Nachdem sich diese Population einmal gebildet hat, wächst sie sehr schnell auf Kosten der ursprünglichen weiter. Es entsteht ein bimodales Spektrum. Nach ca. 53 min existiert schließlich nur noch eine Tropfenpopulation bei großen Tropfen. Auffällig ist ebenfalls, dass es bei dieser Entwicklung zu einer Verbreiterung des Tropfenspektrums kommt. Die Verteilung verschiebt sich nicht nur zu größeren Tropfen, sondern breitet sich auch über einen weiteren Bereich aus. Nach 1 h Entwicklung hat

noch keine so starke Konzentration auf einen einzelnen Größenbereich stattgefunden, wie sie zu Beginn vorlag.

Um den Einfluss der Kollisionseffizienz auf diese Prozesse zu untersuchen, wird nun die Lösung von Gleichung 4.12 für die Kollisionseffizienz aus Tabelle 4.1 betrachtet. Die Dar-

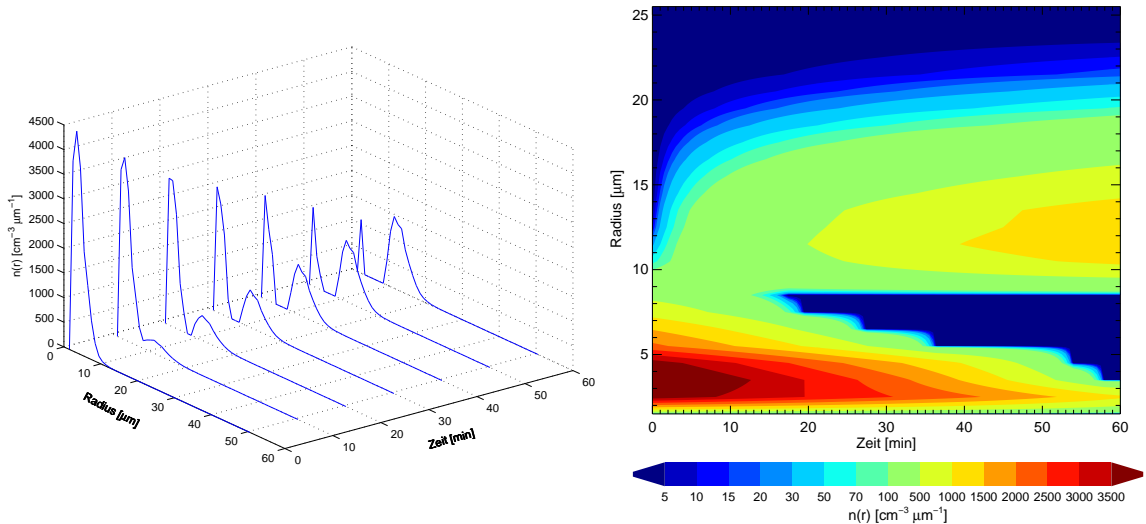


Abbildung 4.8: zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums anhand der stochastischen Koaleszenzgleichung, E aus Tabelle 4.1, links: Darstellung alle 10 min, rechts: Darstellung alle 30 s

stellung in Abbildung 4.8 ist identisch mit derjenigen in Abbildung 4.7. Beim Vergleich fällt auf, dass die Bildung einer zweiten Tropfenpopulation langsamer erfolgt. Dies ist besonders gut im rechten Bild zu erkennen. Während in Abbildung 4.7 die Bildung einer zweiten Tropfenpopulation bereits nach 15 min beginnt, dauert es in Abbildung 4.8 fast 20 min. Gleichzeitig dauert es auch länger, bis sich ein entsprechendes Maximum bei großen Tropfen bildet. D.h. nach der gleichen Integrationszeit befinden sich in diesem Fall mehr kleine Tropfen innerhalb des Tropfenspektrums, die miteinander wechselwirken können. Somit ist in diesem Fall nach 60 min noch eine schmale Verteilung bei kleinen Tropfen vorhanden, während das Maximum bei den großen Tropfen noch nicht den Wert von Abbildung 4.7 erreicht hat. Auf die eigentliche Entwicklung des Tropfenspektrums (Verlagerung zu größeren Tropfen) hat die Wahl der Kollisionseffizienz allerdings keinen Einfluss (Twomey (1965)), sondern sie wirkt sich lediglich auf die Zeit bis Erreichen eines bestimmten Entwicklungsstandes aus (Warshaw (1968)). Dies wird durch den Vergleich von Abbildung 4.7 mit Abbildung 4.8 bestätigt.

Der Koagulationsprozess selber besteht aus einer Überlagerung von drei Formen der Wechselwirkung. Dabei handelt es sich im Einzelnen um die Autokonversion, die „Accretion“ und die „self-collection“. Für eine detaillierte Darstellung dieser Phasen, wird ein Experiment mit zwei überlagerten Größenspektren durchgeführt (Berry und Reinhard (1974)). Dadurch liegt zu Beginn ein bimodales Initialspektrum vor. Die zeitliche Entwicklung dieses Spektrums wird nun nach Gleichung 4.12 betrachtet, wobei verschiedene Einschränkungen für die Kollisionen vorgegeben werden, die die einzelnen

Entwicklungsphasen des Spektrums repräsentieren.

In Abbildung 4.9 ist der „normale“ Fall dargestellt, d.h. es dürfen ohne Einschränkungen alle Tropfen miteinander kollidieren. Die Entwicklung dieses Spektrums entspricht

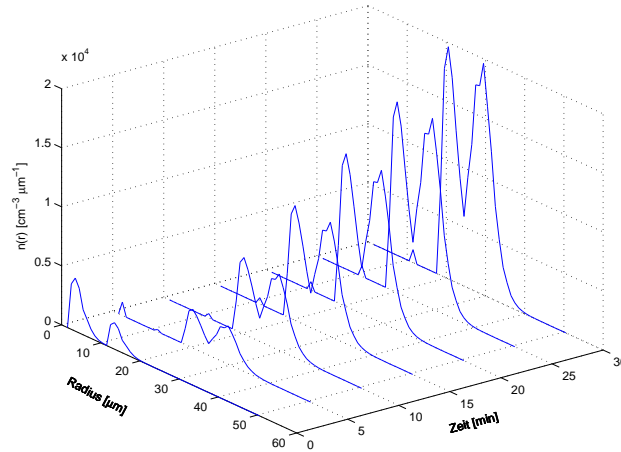


Abbildung 4.9: zeitliche Entwicklung eines bimodalen Tröpfchenspektrums, wobei alle Kollisionen erlaubt sind

daher im Wesentlichen der aus Abbildung 4.7. Es verschwinden in diesem Fall zwar in der Tat die kleineren Tropfen, trotzdem kommt es nicht zur Bildung eines einzelnen Maximums bei großen Tropfen. Es bleibt vielmehr die ursprüngliche bimodale Form des Initialspektrums erhalten. Das Spektrum verlagert sich im Ganzen zu größeren Tropfen. Gleichzeitig findet eine Konzentration auf zwei Maxima statt, während der Rest des Spektrums deutlich geringere Werte aufweist, d.h. der Kurvenverlauf ist wesentlich steiler als ursprünglich vorgegeben. Trotzdem erstreckt sich das Spektrum über einen weiteren Größenbereich, d.h. es wird breiter. Dies wird ebenfalls durch ein drittes Maximum (bei ca. 11 μm), welches gegenüber den anderen beiden allerdings deutlich geringerer Intensität ist, betont. Seine Entstehung kann durch interne Kollisionsprozesse der sehr kleinen Tropfen erklärt werden. Aufgrund des anfangs schon vorhandenen zweiten Maximums kommt es diesmal gegenüber Abbildung 4.7 auch schneller zur Bildung großer Tropfen. Die Tropfen wachsen schon nach nur 5 min deutlich über 30 μm hinaus, während in Abbildung 4.7 diese Tropfengröße nicht einmal nach 60 min erreicht wird. D.h. das Wachstum der Tropfen wird entscheidend durch den mittleren Radius der Größenverteilung beeinflusst.

Abbildung 4.10 zeigt nun die zeitliche Entwicklung des bimodalen Initialspektrums, wenn nur Kollisionen innerhalb von Spektrum 1 zugelassen werden. Die Verlagerung zu größeren Tropfen geschieht in diesem Fall sehr langsam. Es wird lediglich ein geringer Teil in den linken Bereich von Spektrum 2 gebracht, so dass eine Ausbuchtung in Richtung des Bereichs der kleineren Tropfen entsteht. Da keinerlei Wechselwirkung mit Spektrum 2 bzw. innerhalb von Spektrum 2 zugelassen ist, erfolgt auch kein Wachstum über dessen Größenbereich hinaus. Dementsprechend befindet sich auch im Bereich des Maximums eine geringere Konzentration als in Abbildung 4.9. Trotzdem ist dieser Fall

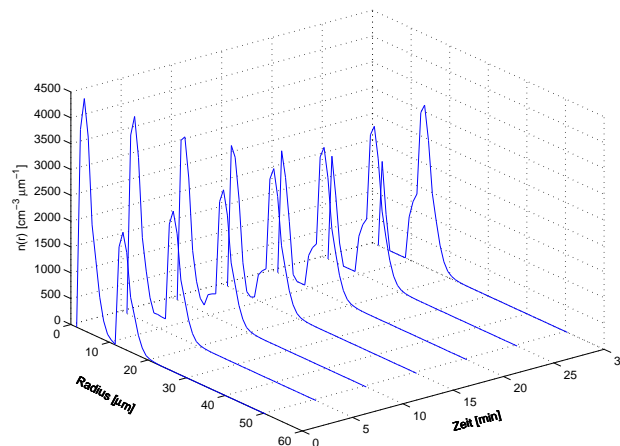


Abbildung 4.10: zeitliche Entwicklung eines bimodalen Tröpfchenspektrums, wobei nur Kollisionen innerhalb Spektrum 1 erlaubt sind

sehr wichtig, da durch ihn die Koagulation initiiert wird. Erst wenn genügend große Tropfen in einer Verteilung vorhanden sind, können diese entscheidend am Tropfenwachstum mitwirken. Diese Phase wird deshalb mit Autokonversion bezeichnet.

Die eigentliche Wachstumsphase („Accretion“) des Tropfenspektrums wird durch Kollisionen zwischen den beiden Spektren hervorgerufen. Um dies zu verdeutlichen sind in Abbildung 4.11 nur Kollisionen zwischen Spektrum 1 und Spektrum 2 zugelassen. Dabei werden zum einen Tropfen in den Bereich von Spektrum 2 transportiert und zum anderen aus dessen Bereich hinaus. Allerdings wachsen in dieser Phase die großen Tropfen sehr schnell auf Kosten der kleineren, so dass bereits nach 5 min bei geringen Radien keine Tropfen mehr vorhanden sind. Das Maximum des Tropfenspektrums bildet sich bei ca. 20 μm mit einer Intensität aus, die die Konzentration der ursprünglich vorhandenen Tropfen weit übersteigt. D.h. dieser Mechanismus ist für die Bildung von großen Tropfen deutlich effektiver gegenüber dem der Autokonversion.

Für eine komplette Beschreibung des Koagulationsprozesses wird allerdings noch ein dritter Mechanismus benötigt. Deshalb sind in Abbildung 4.12 nur Kollisionen zwischen Tropfen aus Spektrum 2 zugelassen („self-collection“). In diesem Fall beginnt die Entwicklung mit einer Verschiebung des Maximas von Spektrum 2 zu größeren Tropfen. Erst dann nimmt die Intensität erheblich zu und es erfolgt gleichzeitig im Bereich der größeren Tropfen eine Konzentration auf einige wenige. Die Kurve von Spektrum 2 weist einen steilen Anstieg auf, der in einem schmalen Maximabereich endet. Der Abfall der Kurve verläuft demgegenüber wesentlich flacher und umfasst damit einen weiteren Größenbereich. D.h. mit dieser Phase kann in Abbildung 4.9 der abflachende Bereich zu großen Radien hin erklärt werden.

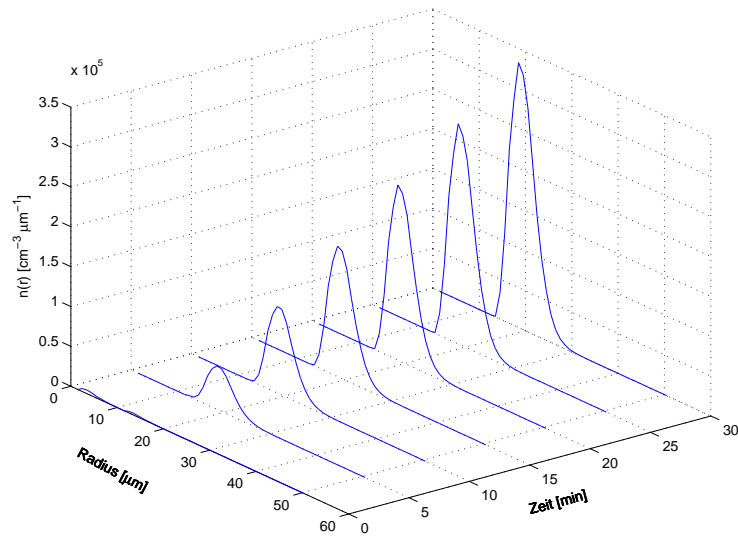


Abbildung 4.11: zeitliche Entwicklung eines bimodalen Tröpfchenspektrums, wobei nur Kollisionen zwischen Spektrum 1 und Spektrum 2 erlaubt sind

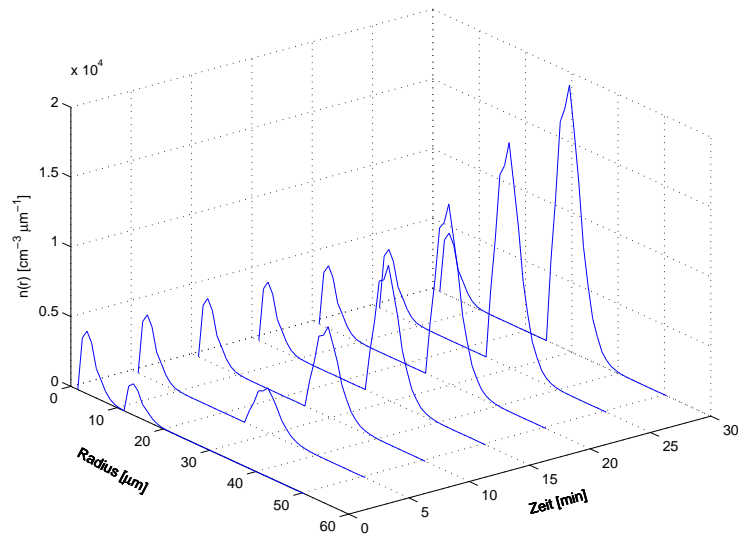


Abbildung 4.12: zeitliche Entwicklung eines bimodalen Tröpfchenspektrums, wobei nur Kollisionen innerhalb Spektrum 2 erlaubt sind

Für die vorangegangenen Untersuchungen wurde angenommen, dass zu jedem Zeitpunkt genügend kleine Tropfen vorhanden sind. D.h. der Wolke werden ständig neue kleine Tropfen zugeführt, z.B. durch Aktivierung neuer Tropfen im Aufwindbereich. Diesmal wird zu Beginn eine Tropfengrößenverteilung vorgegeben und ihre zeitliche Entwicklung ohne Tropfenzufuhr von außen betrachtet. Dazu wird bei der Berechnung nach jedem Zeitschritt die dann aktuelle Verteilung benutzt, anstatt der Initialverteilung.

In Abbildung 4.13 ist die zeitliche Entwicklung für ein Initialspektrum nach diesen Kriterien dargestellt, wobei wieder beide Bilder die gleiche zeitliche Entwicklung zeigen. In der linken Grafik wird das Tropfenspektrum jede Minute dargestellt, während dies in der rechten alle 30 s geschieht.

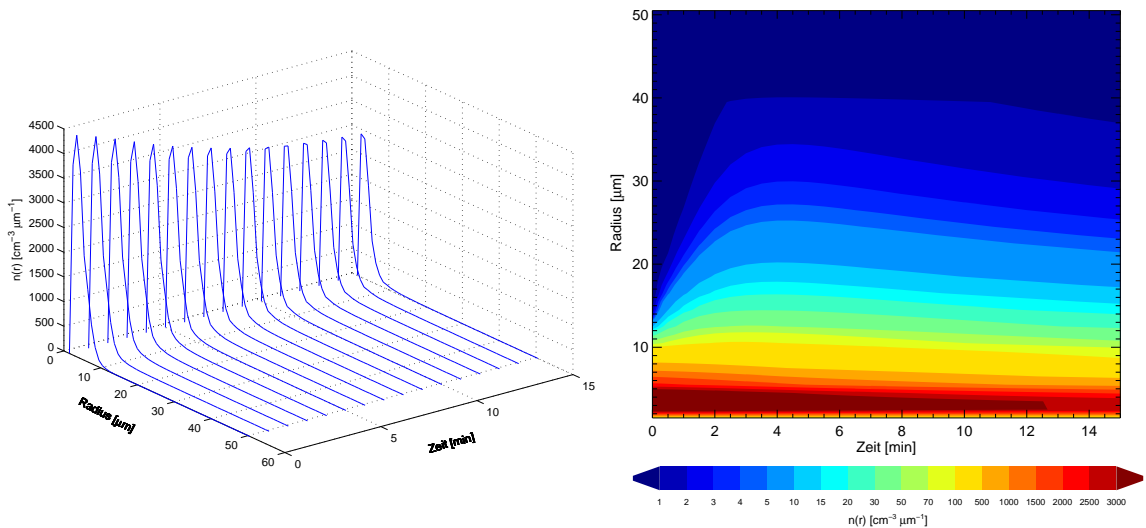


Abbildung 4.13: zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums anhand der stochastischen Koaleszenzgleichung für ein zeitlich variables Tröpfchenspektrum, links: Darstellung jede min, rechts: Darstellung alle 30 s

Es fällt auf, dass bei dieser Variante keinerlei nennenswerte Ausbildung eines zweiten Maximums oder gar die komplette Verlagerung des Spektrums zu größeren Tropfen stattfindet. Lediglich die Darstellung im rechten Bild ermöglicht es Veränderungen in den Größenbereichen festzustellen. So kann in den ersten Minuten eine minimale Zunahme von Tropfen mit einem Radius größer 10 μm beobachtet werden. Gleichzeitig nimmt die Tropfenzahl bei den kleineren Radien erwartungsgemäß ab. Nach ungefähr 4 min stoppt diese Entwicklung allerdings und es kommt in allen Größenbereichen zu einer Abnahme der Tropfenzahl. Nachdem diese einmal eingesetzt hat, kommt es zu einem späteren Zeitpunkt zu keiner weiteren Konzentrationssteigerung. Insgesamt gehen bei dieser Variante Tropfen verloren, d.h. die Gesamtkonzentration des Tropfenspektrums bleibt nicht erhalten.

4.2.2.2 Lösung der stochastischen Koaleszenzgleichung mit der Monte-Carlo Methode

Diesmal wird zur Lösung der stochastischen Koaleszenzgleichung (Gleichung 4.12) die Monte-Carlo Methode verwendet. Dabei wird genau nach den in Kapitel 4.2.1.2 genannten Schritten vorgegangen.

Abbildung 4.15 zeigt eine Tropfengrößenverteilung, die sich nach 10000 Realisierungen entsprechend entwickelt. Diesmal ist für das Initialspektrum schon eine Verteilung mit einem größeren mittleren Radius gewählt worden (Abbildung 4.14), da das Wachstum von großen Tropfen ziemlich langsam geschieht.

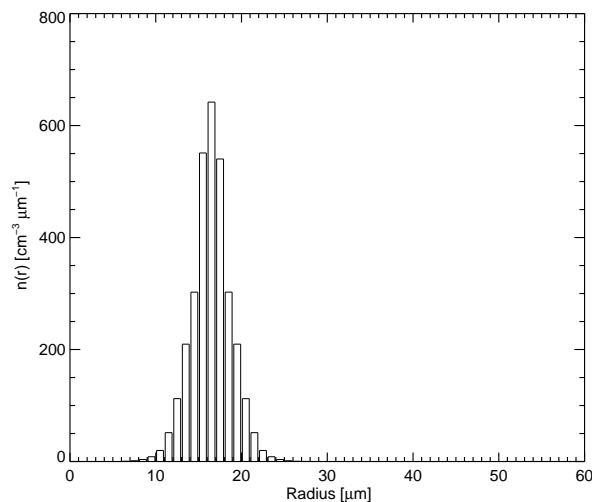


Abbildung 4.14: Initialverteilung für Tropfenwachstum anhand der stochastischen Koaleszenzgleichung mittels der Monte-Carlo Methode

Es ist eine leichte Zunahme der Tropfen bei größeren Radien zu erkennen. Diese fällt allerdings gegenüber dem vorgegeben Initialspektrum sehr gering aus. So kann keine wirkliche Verlagerung des Maximums festgestellt werden. Das Verhalten begründet sich in dem Simulations-Algorithmus. So werden die an einem Koaleszenzprozess beteiligten Tropfen aus der Verteilung entfernt. Da es allerdings zu Beginn viele kleine gibt, dauert es auch entsprechend bis diese verschwinden. Außerdem entsteht bei der Koaleszenz zweier kleiner Tropfen nur ein unwesentlich größerer Tropfen, d.h. die großen Tropfen werden erst durch Koaleszenz mit einem großen Tropfen erzeugt. Da dabei der große Tropfen ebenfalls aus der Verteilung entfernt wird, kann sich dort auch nur schwer ein Maximum bilden. Erst die Durchführung mehrerer Realisierungen ermöglicht eine Bildung. Allerdings ist die Konzentration in den einzelnen Größenklassen auch sehr gering (Abbildung 4.15, links). Die Betrachtung der Standardabweichung (Abbildung 4.15, rechts) zeigt eine deutliche Zunahme sobald nur noch wenige Tropfen in der Verteilung vorhanden sind.

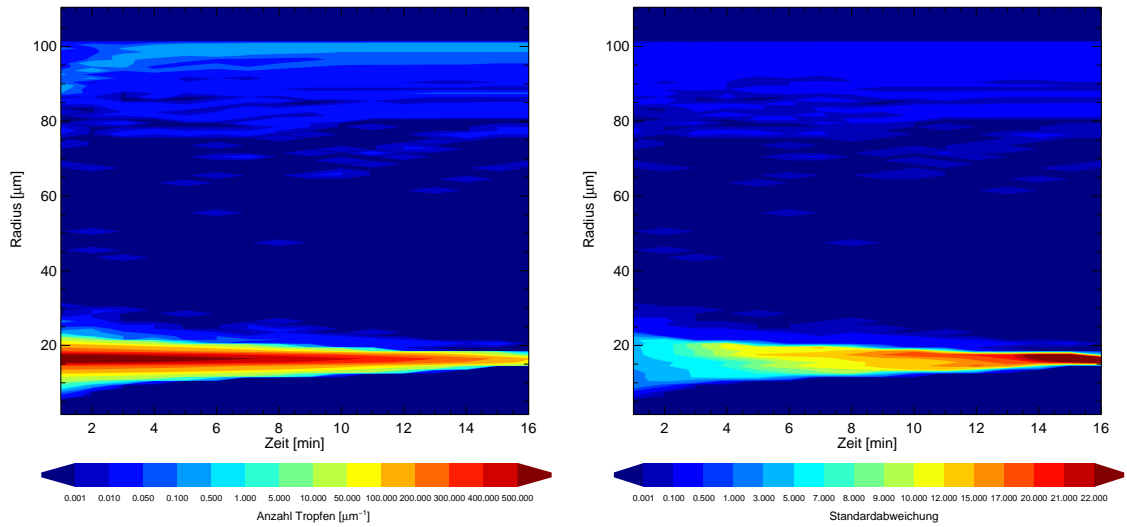


Abbildung 4.15: links: zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums anhand der stochastischen Koaleszenzgleichung mittels der Monte-Carlo Methode, rechts: zeitlicher Verlauf der Standardabweichung für jede Größenklasse

Der Simulations-Algorithmus von Gillespie (1975) erfordert allerdings die Speicherung jedes einzelnen Tropfens, so dass bei dieser Beschränkung auf Tropfengrößenklassen die Anzahl innerhalb der einzelnen Klassen bei der Berechnung für die Wahrscheinlichkeit für Koagulation nicht korrekt eingeht. Für eine Behandlung von Größenklassen müsste der Algorithmus entsprechend angepasst werden.

Kapitel 5

Tropfenwachstum durch Kondensation und Koaleszenz

In Kapitel 4 wurden für das Tropfenwachstum alleine die Kollisionsprozesse innerhalb der Wolke herangezogen. Um nun eine realistische zeitliche Entwicklung des Tropfenwachstums zu erhalten, müssen zusätzlich die Kondensationsprozesse (Kapitel 3) berücksichtigt werden. Eine Nichtberücksichtigung des Kondensationswachstums führt zu einer Unterschätzung der Anzahldichte der großen Tropfen. Denn jede noch so kleine Zunahme ermöglicht wiederum eine Beschleunigung des Kollisionsprozesses, da dann mehr große Tropfen zur Verfügung stehen (Ryan (1974)).

In diesem Kapitel erfolgt deshalb eine Verbindung zwischen beiden Prozessen. Dabei wird für das Koaleszenzwachstum die Annahme einer konstanten Verteilung verfolgt. D.h. es wird für ein vorgegebenes Initialspektrum die zeitliche Entwicklung einer jeden Tropfenklasse separat betrachtet und anschließend zu einer gesamten zeitlichen Entwicklung zusammengesetzt. Das sich nach jedem Zeitschritt ergebene Spektrum hat auf den weiteren Integrationsverlauf keinen Einfluss. Zusätzlich wird diesmal nach jedem Zeitschritt für jeden Tropfen ein Wachstum durch Kondensation entsprechend Gleichung 3.15 berücksichtigt.

Abbildung 5.1 zeigt nun die zeitliche Entwicklung eines vorgegebenen Initialspektrums (Abbildung 3.4). Die Umgebungsbedingungen entsprechen wieder denjenigen aus Abbildung 3.4 (radiosaufstieg). Außerdem ist ein konstanter Aufwind von $0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ vorgegeben.

Auf den ersten Blick ist ein deutliches Wachstum der Tropfen mit einem maximalen Radius von über $50 \mu\text{m}$ schon nach 30 min zu erkennen. Anfangs überwiegt das Koaleszenzwachstum. So bildet sich bereits nach 2 min ein zweites Maximum aus und das Tropfenspektrum wird entsprechend breiter. Nach nur 5 min hat sich das Maximum bei den kleineren Tropfen vollkommen aufgelöst und die Tropfenverteilung sich somit komplett zu den großen Tropfen verlagert. Gleichzeitig nimmt die Konzentration bei den großen Tropfen deutlich zu und übersteigt schnell die anfänglich vorhandene Konzentration. Nach der Auflösung des ersten Maximums wird das Spektrum wieder schmaler und es erfolgt im Weiteren nur eine Verlagerung zu größeren Tropfen mit weiterer Konzentrationssteigerung, d.h. es dominiert nun das Kondensationswachstum.

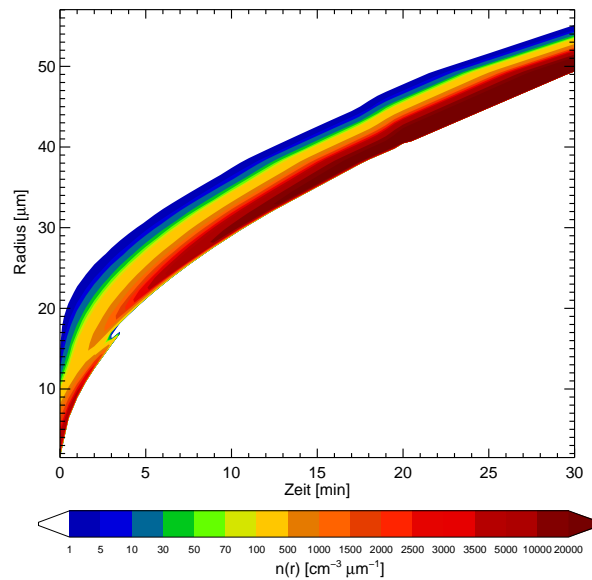


Abbildung 5.1: zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums durch Koaleszenz und Kondensation

Durch die Kombination mit dem Kondensationswachstum werden in diesem Fall schnell so große Tropfen erzeugt, die ein rasches Einsammeln der kleinen Tropfen begünstigen. Aufgrund dessen erfolgt der Wachstumsprozess des kompletten Größenspektrums auf deutlich kleineren Zeitskalen gegenüber den einzelnen Prozessen. Bei dieser Kombination können deshalb in relativ kurzer Zeit Tropfen erzeugt werden, die eine Chance haben als Niederschlag den Erdboden zu erreichen.

Der Unterschied in diesen zwei Wachstumsphasen wird besonders deutlich, wenn der effektive Radius der Größenverteilung betrachtet wird. Abbildung 5.2 zeigt dessen zeitlichen Verlauf. Zum Vergleich ist dort zusätzlich in blau der effektive Radius bei reinem Kondensationswachstum eingezeichnet. Für das Größenspektrum nach Abbildung 5.1 ist innerhalb der ersten 3 min ein deutlicher Anstieg zu erkennen. Dies entspricht genau dem Zeitpunkt der Entstehung eines bimodalen Spektrums. Anfangs befindet sich das Maximum der Größenverteilung noch bei kleinen Tropfen, so dass ein kleiner effektiver Radius zu erwarten ist. Sobald nach ungefähr 5 min das Größenspektrum sich zu einer monodispersen Verteilung entwickelt, ist der Anstieg im effektiven Radius flacher. Die Kurve nähert sich einer Wurzelfunktion an, wodurch die Dominanz des Kondensationswachstums unterstrichen wird. Dies wird durch den Vergleich mit der Kurve für Kondensationswachstum bestätigt. So verlaufen sie ab diesem Zeitpunkt nahezu parallel. Der Vergleich beider Kurven spiegelt ebenfalls das schnellere Wachstum von größeren Tropfen bei der Kombination wieder, da die blaue Kurve zu jedem Zeitpunkt unterhalb der schwarzen liegt.

Es entstehen bei der Kombination von Koaleszenz- und Kondensationswachstum also im Wesentlichen zwei Wachstumsbereiche, in denen jeweils eine Wachstumsform dominiert.

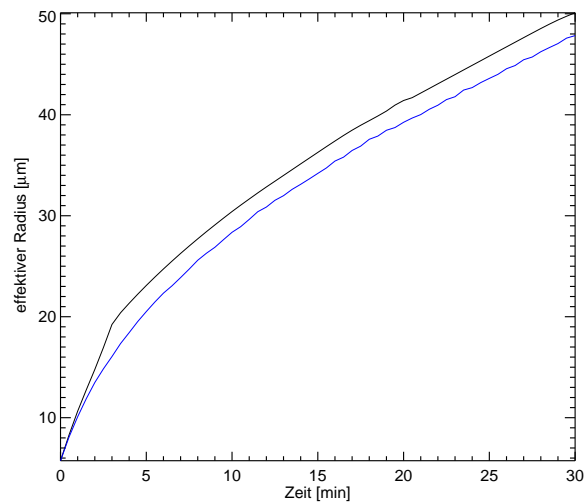


Abbildung 5.2: zeitliche Entwicklung des effektiven Radius für das Größenspektrum nach Abbildung 5.1 (schwarz), zeitliche Entwicklung des effektiven Radius für reines Kondensationswachstum (blau)

Zu erwarten wäre allerdings die erneute Bildung einer bimodalen Verteilung, sobald sich ein neues Maximum bei den zu diesem Zeitpunkt kleinsten Tropfen der Größenverteilung gebildet hat. Dies lässt sich anhand Abbildung 5.1 auch nicht komplett ausschließen, da die Auflösung des ersten Maximums bei einer Erstreckung der gesamten Verteilung über größere Radien deutlich schneller erfolgt.

Dies wird in Abbildung 5.3 für zwei unterschiedliche Anfangsspektren gezeigt. Die Initialspektren erstrecken sich in diesem Fall über größere Radien, d.h. zu Beginn der Tropfenentwicklung liegen schon größere Tropfen vor die weiter wachsen. So zeigen die beiden oberen Bilder in Abbildung 5.3 das jeweilige Initialspektrum für die Tropfenentwicklung in den beiden unteren Bildern.

Das Tropfenwachstum erfolgt in diesem Fall entsprechend Abbildung 5.1, dabei aber mit einer grafischen Auflösung von 10 s und dafür nur für die ersten 10 min der Entwicklung. Das Anfangsspektrum erstreckt sich bei (a) schon über einen Größenbereich von 22 bis 30 μm . Entsprechend schneller entwickelt sich das komplette Spektrum bei (c) zu großen Tropfen. So erfolgt anfangs die Bildung eines bimodalen Tropfenspektrums, wobei sich schon nach nur 30 s das Maximum bei den kleineren Tropfen komplett aufgelöst hat. Anschließend erfolgt nur noch eine Verlagerung des kompletten Tropfenspektrums zu größeren Tropfen hin mit weiterer Konzentrationssteigerung. Die Konzentration ist diesmal auch deutlich größer gegenüber dem kleineren Anfangsspektrum.

Noch deutlicher ist der Unterschied in der zeitlichen Entwicklung für ein Tropfenspektrum, welches sich zu Beginn über einen Bereich von 29 bis 36 μm erstreckt (Abbildung 5.3 (b), (d)). Diesmal löst sich das erste Maximum schon sehr schnell auf und es erfolgt nur noch eine Verlagerung des Tropfenspektrums zu größeren Radien mit Konzentrationssteigerung. Deshalb besteht auch in Abbildung 5.1 zu einem späteren Zeitpunkt die

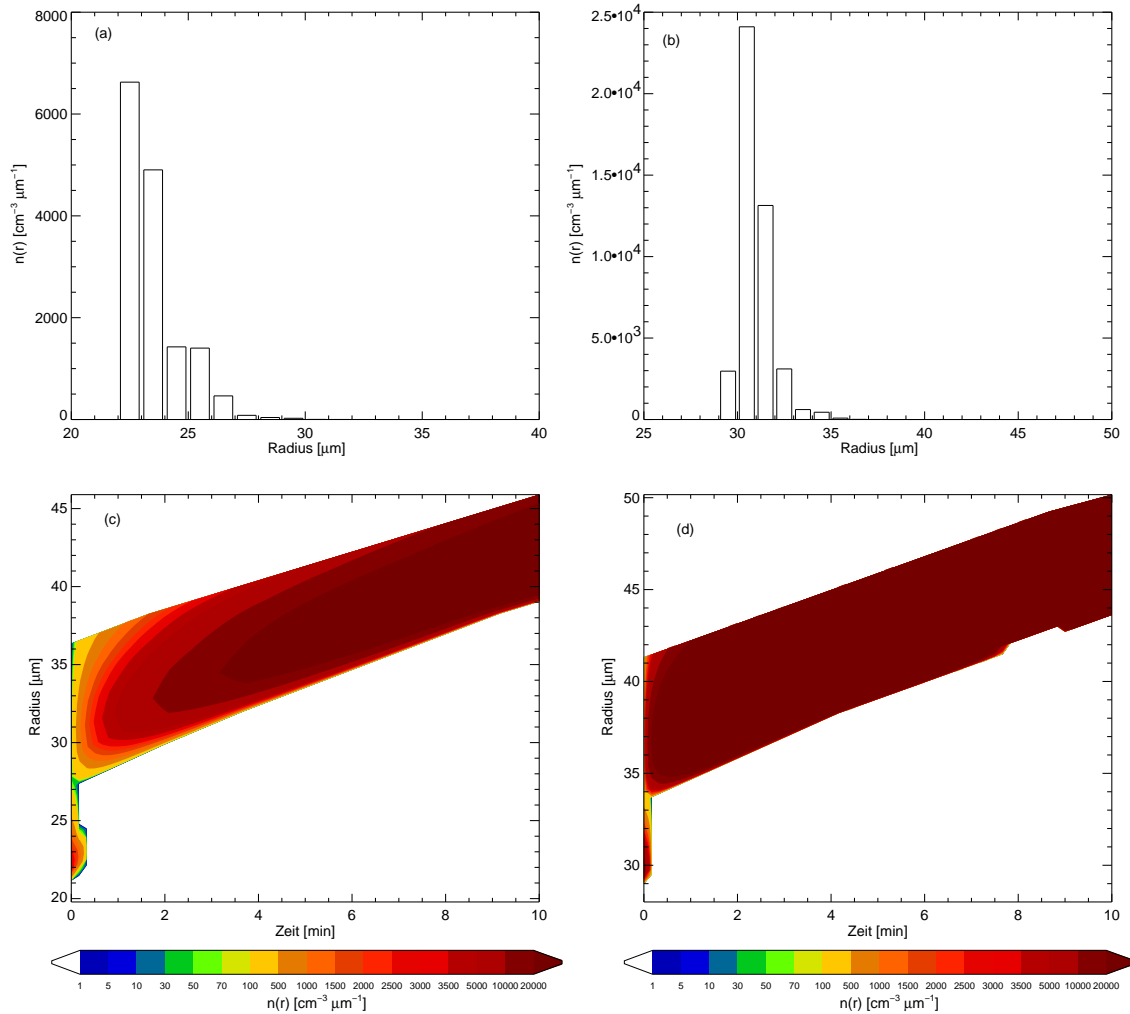


Abbildung 5.3: zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums durch Koaleszenz und Kondensation, rechts: für ein Anfangsspektrum mit Radien zwischen 22 und 30 μm , links: für ein Anfangsspektrum mit Radien zwischen 29 und 36 μm , Darstellung bei (c) und (d) jeweils alle 10 s

Möglichkeit von Tropfenwachstum durch Koaleszenz. Allerdings bildet sich die bimodale Verteilung bei großen Tropfen so schnell zurück, dass sie innerhalb der 30 s Abstände nicht mehr aufgelöst werden kann. Aufgrund dessen ist eine Einteilung des Wachstumsverhaltens in zwei separate Wachstumsbereiche nicht komplett gerechtfertigt.

5.1 Variation der Umgebungsbedingungen

Um nun wieder einen Überblick über den Einfluss der Umgebungsparameter, wie Temperatur, spezifische Feuchte und Aufwind, zu gewinnen, werden diese im Folgenden durch verschiedene Prozesse variiert. Dabei wird entsprechend Kapitel 3.3.3 vorgegangen.

Zuerst wird also der gemessenen Größe ein, innerhalb eines vorgegebenen Intervalls, zufallsverteilter Wert addiert. Diese Werte sind zu jedem Zeitpunkt unabhängig voneinander. Betrachtet wird nun der Einfluss jedes einzelnen Parameters separat.

Den Anfang macht die Temperatur, die um ± 2 K verrauscht wurde, d.h.

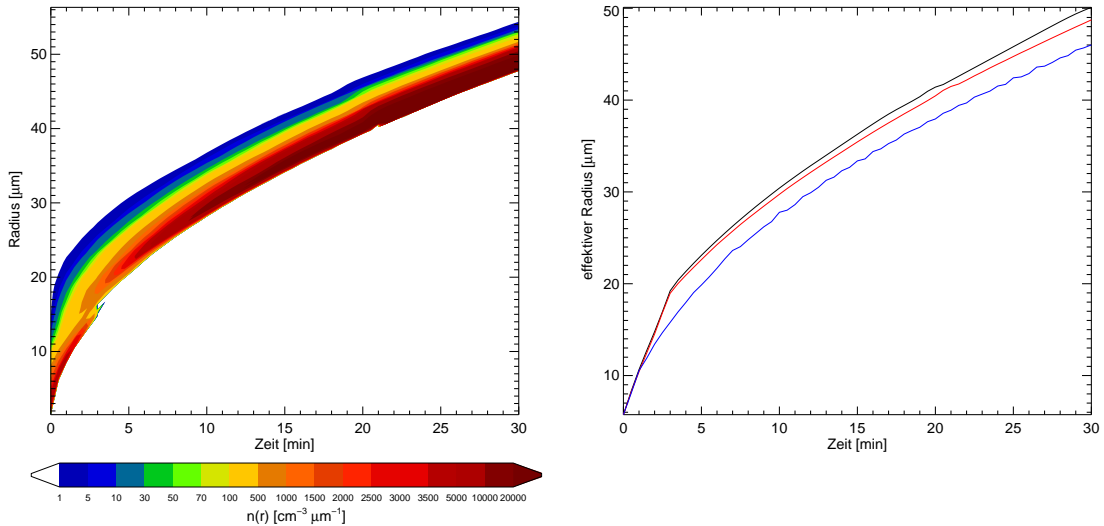


Abbildung 5.4: zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums durch Koaleszenz und Kondensation bei einer Variation der Temperatur um ± 2 K, links: zeitliche Entwicklung des Tropfenspektrums, rechts: zeitliche Entwicklung des entsprechenden effektiven Radius, verrauschter Zustand (rot) gegenüber Normalzustand (schwarz), reines Kondensationswachstum (blau)

$$T = T_{\text{mess}} + R; \quad R \in [-2, 2] \quad (5.1)$$

Bei R handelt es sich um eine gleichverteilte Zufallszahl aus dem angegebenen Definitionsbereich. Dargestellt ist in Abbildung 5.4 im linken Bild die zeitliche Entwicklung des Tropfenspektrums unter diesen Bedingungen und im rechten Bild die zeitliche Entwicklung des entsprechenden effektiven Radius des verrauschten Zustandes (rot) gegenüber dem des Normalzustandes (schwarz). Beim Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Tropfenspektrums mit Abbildung 5.1 ist auf den ersten Blick eine übereinstimmende Entwicklung zu erkennen. Bei genauerem Hinsehen entwickelt sich das Spektrum in diesem Fall allerdings etwas langsamer. Außerdem erstreckt es sich innerhalb der ersten Minuten über einen weiteren Größenbereich, d.h. es ist breiter. Diese Tendenz lässt sich durch ein allgemeines langsames Wachstum jedes einzelnen Tropfen erklären. Die Unterschiede in der Wachstumszeit werden besonders bei Betrachtung der zeitlichen Entwicklung des jeweiligen effektiven Radius deutlich. So verlaufen die beiden Kurven innerhalb der ersten 3 min noch ungefähr übereinander und danach spalten sich beide voneinander ab. Die Kurve des verrauschten Zustandes verläuft deutlich unterhalb derjenigen des Normalzustandes. An dieser Stelle wird also wieder der Einfluss des Kondensationswachstums erkennbar, wo ein ähnliches Verhalten beobachtet worden ist (Abbildung 3.11). Dies zeigt auch der zusätzlich in blau eingezeichnete effektive Radius für ein Tropfenspek-

trum, welches allein durch Kondensation wächst. Nach der Auflösung des ersten Maximums verlaufen die Radien der verrauschten Bedingungen im Wesentlichen parallel. Die gleichen Untersuchungen werden nun für die spezifische Feuchte angestellt. Diese wurde um $\pm 1 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$ verrauscht, d.h.

$$q = q_{\text{mess}} + R; \quad R \in [-1, 1] \quad (5.2)$$

Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.5 entsprechend Abbildung 5.4 dargestellt. Diesmal verläuft die zeitliche Entwicklung des Tropfenspektrums nahezu identisch zu

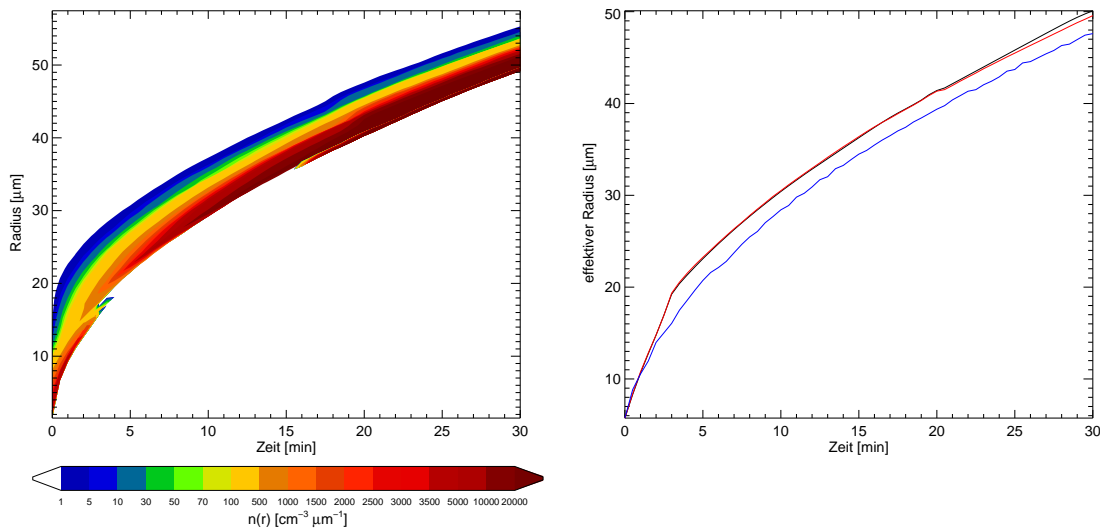


Abbildung 5.5: zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums durch Koaleszenz und Kondensation bei einer Variation der spezifischen Feuchte um $\pm 1 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$, links: zeitliche Entwicklung des Tropfenspektrums, rechts: zeitliche Entwicklung des entsprechenden effektiven Radius, verrauschter Zustand (rot) gegenüber Normalzustand (schwarz), reines Kondensationswachstum (blau)

derjenigen unter Normalbedingungen. Deutlicher lässt sich diese These mit der Entwicklung des effektiven Radius belegen. Dort liegen beide Kurven über die komplette Integrationszeit fast übereinander. Erst nach ca. 20 min spalten sie sich voneinander ab. Der Tropfen, der den verrauschten Bedingungen unterliegt, wächst auch in diesem Fall langsamer. Gegenüber dem Effekt der Temperaturvariation ist diesmal die Auswirkung allerdings deutlich geringer. Der Unterschied zum Normalzustand tritt erst viel später auf und ist entsprechend schwächer.

Schließlich wird der Aufwind betrachtet, der um $\pm 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ verrauscht wurde, d.h.

$$w = w_{\text{mess}} + R; \quad R \in [-1, 1] \quad (5.3)$$

In Abbildung 5.6 sind die Auswirkungen entsprechend Abbildung 5.4 gezeigt.

Diesmal ist schon bei der zeitlichen Entwicklung des Tropfenspektrums eine gravierende Änderung gegenüber dem Normalzustand festzustellen. Das erste Maximum hat sich bereits nach 1 min vollständig aufgelöst und es erfolgt nur noch eine Verlagerung des

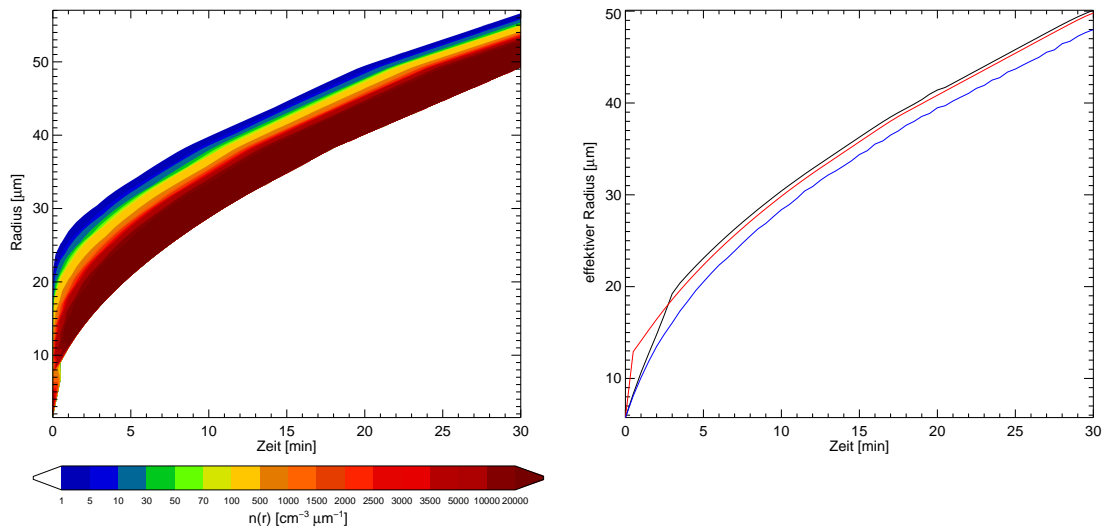


Abbildung 5.6: zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums durch Koaleszenz und Kondensation bei einer Variation des Aufwindes um $\pm 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, links: zeitliche Entwicklung des Tropfenspektrums, rechts: zeitliche Entwicklung des entsprechenden effektiven Radius, veranschaulicht Zustand (rot) gegenüber Normalzustand (schwarz), reines Kondensationswachstum (blau)

kompletten Tropfenspektrums zu größeren Tropfen. Obendrein ist in dieser Abbildung die Ausbildung eines bimodalen Spektrums gegenüber den vorherigen weniger deutlich zu erkennen, da sich bereits nach nur 1 min die Bimodalität aufgelöst hat. Die Tropfenkonzentration innerhalb der einzelnen Größenklassen ist ebenfalls erheblich stärker gegenüber allen bisherigen Fällen. Bei Betrachtung des effektiven Radius fällt zusätzlich auf, dass anfangs bis ca. 3 min ein deutlich schnelleres Wachstum erfolgt gegenüber demjenigen unter Normalbedingungen. Besonders innerhalb der ersten Minute ist ein steiler Anstieg zu verzeichnen. D.h. der anfängliche Kurvenverlauf ist stark mit der Auflösung des ersten Maximums gekoppelt. Nach 3 min schneiden sich die beiden Kurven und der effektive Radius des veranschaulichten Tropfenspektrums verläuft unterhalb dessen des Normalzustandes, wobei beide Kurven parallel liegen. D.h. nach einem schnelleren Wachstum zu Beginn entwickeln sich die Spektren gleich.

Bei dieser Variation der Umgebungsparameter löst also der Aufwind den größten Einfluss aus. Dies lässt sich unmittelbar erklären, da eine Variation des Aufwindes sich zusätzlich zu einer Höhenänderung (wird hier nicht betrachtet) im Koagulationskoeffizienten (Gleichung 4.6) der beteiligten Tropfen auswirkt. Dieser wiederum wirkt sich erheblich auf das Verschmelzen der Tropfen miteinander aus und so erklärt sich auch die schnelle Auflösung des ersten Maximums. Aufgrund der Variation des Aufwindes erhöht sich der Koagulationskoeffizient und damit die Wahrscheinlichkeit für eine Kollision zwischen den jeweiligen Tropfen. Beide anderen Parameter (Temperatur, spezifische Feuchte) nehmen direkt über das Kondensationswachstum Einfluss auf die gesamte Entwicklung des Tropfenspektrums. Dabei entstehen keine so gravierenden Auswirkungen für die komplette Entwicklung des Tropfenspektrums. Es sind eher identische Auswir-

kungen wie schon beim reinen Kondensationswachstum zu beobachten. Deshalb liegt die Begründung dieses Verhaltens auch wieder in der nichtlinearen Einflussnahme der Temperatur auf das Tröpfchenwachstum.

Analog zu Kapitel 3.3.3 wurde nun im zweiten Schritt ein AR(1)-Prozess auf das Rauschen selber angewendet, um die Zeitskala für die Variabilität der Atmosphäre zu verlängern. Die Koeffizienten α_0 und α_1 sind entsprechend wieder mit $\alpha_0 = 0$ und $\alpha_1 = 0.5$ gewählt worden. Betrachtet werden die Auswirkungen für eine Variation der Temperatur und des Aufwindes, da nur diese beiden Parameter eine Reaktion im Falle des gleichverteilten Rauschens gezeigt haben.

Zuerst wird die Temperatur betrachtet, die um ± 2 K verrauscht wurde, d.h.

$$T = T_{\text{mess}} + R; \quad R \in [-2, 2] \quad (5.4)$$

R ergibt sich mit Hilfe des AR(1)-Prozesses.

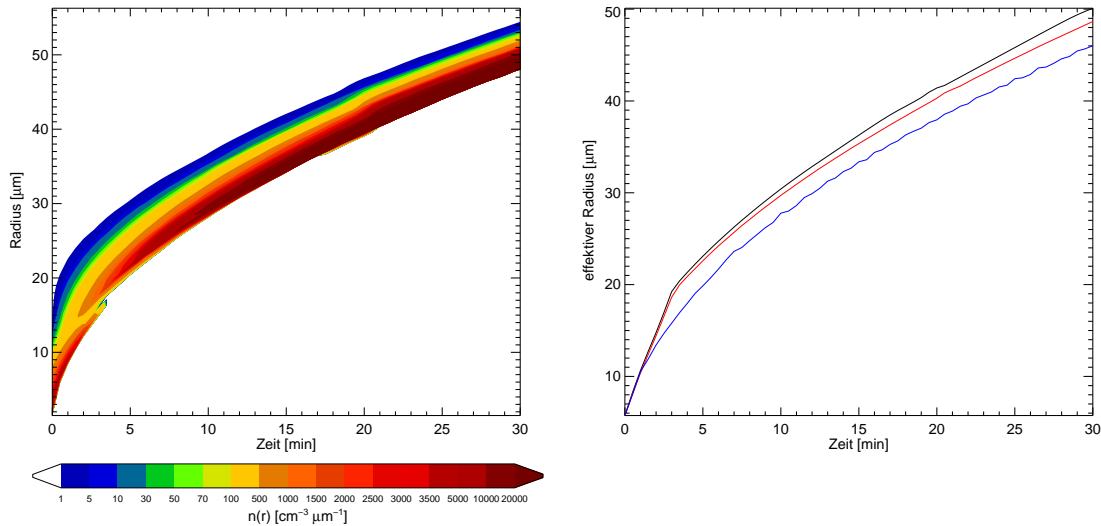


Abbildung 5.7: zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums durch Koaleszenz und Kondensation bei einer Variation der Temperatur um ± 2 K mittels AR(1)-Prozess auf den Rauscheinfluss, links: zeitliche Entwicklung des Tropfenspektrums, rechts: zeitliche Entwicklung des effektiven Radius, verrauschter Zustand (rot) gegenüber Normalzustand (schwarz), reines Kondensationswachstum (blau)

Beim Vergleich mit dem Verhalten eines Tropfenspektrums unter Normalbedingungen sind kaum Unterschiede zu erkennen. Die zeitliche Entwicklung des kompletten Spektrums erfolgt identisch, allerdings erreichen die Tropfen zu den entsprechenden Zeitpunkten andere Radien. Dies wird besonders deutlich, wenn die Entwicklung des effektiven Radius betrachtet wird. Dort liegen anfangs beide Kurven übereinander und spalten sich nach ungefähr 3 min voneinander ab. Ab diesem Zeitpunkt wächst der Tropfen unter verrauschten Bedingungen erheblich langsamer.

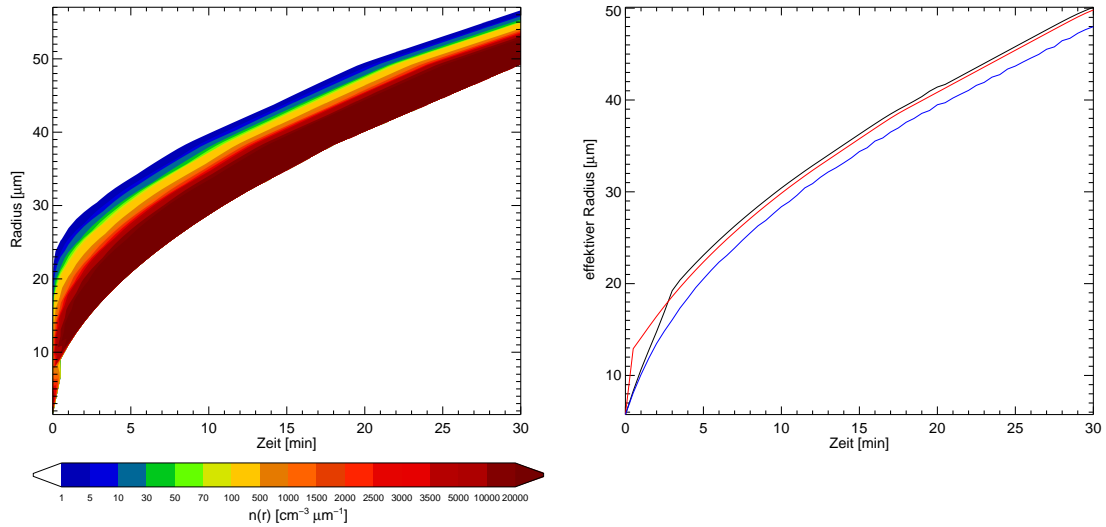


Abbildung 5.8: zeitlicher Verlauf des Tropfenwachstums durch Koaleszenz und Kondensation bei einer Variation des Aufwintes um $\pm 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ mittels AR(1)-Prozess auf den Rauscheinfluss, links: zeitliche Entwicklung des Tropfenspektrums, rechts: zeitliche Entwicklung des entsprechenden effektiven Radius, verrauschter Zustand (rot) gegenüber Normalzustand (schwarz), reines Kondensationswachstum (blau)

Entsprechend erfolgt jetzt die Betrachtung einer Variation des Aufwintes um $\pm 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, d.h.

$$w = w_{\text{mess}} + R; \quad R \in [-1, 1] \quad (5.5)$$

R ist auch in diesem Fall selber modifiziert worden durch einen AR(1)-Prozess.

Abbildung 5.8 zeigt einen starken Einfluss des Aufwintes auf die zeitliche Entwicklung des Größenspektrums. So braucht es diesmal nur ungefähr 1 min, bis sich das erste Maximum komplett aufgelöst hat. Anschließend erfolgt nur noch eine Verlagerung des Spektrums zu größeren Radien mit Konzentrationssteigerung. Gegenüber der Tropfenverteilung unter Normalbedingungen ist diese hier anfangs deutlich breiter. Das Spektrum unter Normalbedingungen erstreckt sich von 1 bis ca. 17 μm und diesmal von 1 bis ca. 24 μm , d.h. es sind 6 weitere Größenklassen besetzt. Der Kurvenverlauf des effektiven Radius begründet sich durch die Auflösung des ersten Maximums. So steigt die Kurve für den verrauschten Zustand sehr steil an, da bereits nach 1 min kein bimodales Tropfenspektrum mehr vorhanden ist. Nach ungefähr 3 min schneiden sich dann beide Kurven, da nun auch unter Normalbedingungen die Auflösung des ersten Maximums stattgefunden hat. Im weiteren Verlauf bleibt der effektive Radius des verrauschten Zustandes unterhalb demjenigen des normalen Zustandes. D.h. das gesamte Spektrum wächst zu Beginn schneller und anschließend entsprechend demjenigen unter Normalbedingungen.

Bei dieser Art der Variation der Umgebungsparameter wird also wieder der größte Effekt durch den Aufwind hervorgerufen. Die Erklärung ist entsprechend derjenigen bei Überlagerung einer unabhängigen Störung. Der Koagulationskoeffizient erhöht sich und begünstigt damit ein schnelleres Wachstum der einzelnen Tropfen. Die Temperatur beeinflusst das Wachstum der einzelnen Tropfen im Wesentlichen durch den Sättigungsgehalt,

d.h. es handelt sich dabei hauptsächlich um Kondensationswachstum. Die Begründung ist also entsprechend derjenigen aus Kapitel 3.3.3.

Für die Produktion großer Tropfen ist besonders eine Variation des Aufwindes geeignet. Sobald an diesem leicht manipuliert wird entsteht ein größerer Koagulationskoeffizient und damit verbunden eine höhere Wahrscheinlichkeit für Koaleszenz zwischen zwei Tropfen. Bei der Initiierung von Niederschlag ist Koaleszenz auch der entscheidende Mechanismus, um in kürzester Zeit möglichst große Tropfen zu erzeugen. Kondensation verstärkt diesen Vorgang lediglich.

Kapitel 6

Schlussbetrachtung

In dieser Arbeit wurden die Prozesse innerhalb einer Wolke spektral zerlegt und die verschiedenen Wachstumsprozesse von einzelnen Wolkentropfen simuliert. Dabei wurde ausgehend von den elementaren Differentialgleichungen für das Wachstum von Wolkentropfen eine komplexe Darstellung der mikrophysikalischen Prozesse durchgeführt. Zusätzlich wurden die Auswirkungen von Variabilität in der Atmosphäre auf das Tropfenwachstum untersucht.

Die simpelste Wachstumsform für einen Tropfen ist das Kondensationswachstum. Dabei hängt das Wachstum zum einen von den chemischen Eigenschaften des Wolkentropfens selber und zum anderen von den äußeren Umgebungsbedingungen ab. Ein komplettes Tropfenspektrum, welches durch Kondensation wächst, wird im Laufe der Zeit immer schmaler. Dabei ist die Form des Ausgangsspektrums unwichtig, wie der Vergleich der zeitlichen Entwicklung einer gemessenen Verteilung mit einer konstanten Größenverteilung gezeigt hat. Die Begründung für dieses Verhalten lässt sich in der Funktion für Kondensationswachstum finden, so kann das Tropfenwachstum in erster Näherung durch eine Wurzelfunktion beschrieben werden. Anfangs wachsen Tröpfchen auf großen Kondensationskernen schneller als Tröpfchen auf kleinen Kernen. Im weiteren Verlauf nähern sich die Zeiten dann immer mehr einander an. D.h. bei diesem Wachstum dauert es ziemlich lange, bis sich Tropfen gebildet haben, die den Erdboden als Niederschlag erreichen können.

Bei der Untersuchung der Einflussnahme der Umgebungsparameter (Temperatur, spezifische Feuchte, Aufwind) hat das Tropfenwachstum im Wesentlichen eine Reaktion auf eine Variation der Temperatur gezeigt. Dabei spielt die leichte Nichtlinearität des Wachstums gegenüber der Temperatur im betrachteten Temperaturintervall eine Rolle.

Anschließend wurde dann Tropfenwachstum durch Koaleszenz betrachtet. Dabei werden lediglich die Kollisionsprozesse zwischen den einzelnen Tropfen berücksichtigt. Beim kontinuierlichen Koaleszenzmodell kann für eine ständig vorhandene Tropfenpopulation der kleinen Tropfen eine Verbreiterung des Tropfenspektrums beobachtet werden. So kommt es erst zur Bildung eines zweiten Maximums bei größeren Tropfenradien, d.h. die gesamte Verteilung wird bimodal, anschließend löst sich dann das erste Maximum vollständig auf. So entsteht eine Tropfengrößenverteilung, deren Maximum

bei deutlich größeren Radien liegt. Das Tropfenwachstum erfolgt in diesem Fall deutlich schneller gegenüber dem Kondensationswachstum. D.h. für die Bildung von Niederschlagspartikel reicht diese Betrachtung schon aus.

Da in einer realen Wolke allerdings die ständige Zufuhr kleiner Tropfen nicht gewährleistet ist, wurde das stochastische Koaleszenzmodell noch für ein zeitlich variables Größenspektrum gelöst. Dabei lies sich allerdings das typische Koaleszenzverhalten nicht erkennen. Die Bildung des zweiten Maximums erfolgt gegenüber dem Abbau des ersten zu langsam bzw. überhaupt nicht. Deshalb kommt es nach der minimalen Bildung eines zweiten Maximums zur Auflösung der kompletten Tropfenpopulation. An dieser Stelle besteht also noch weiterer Forschungsbedarf, um eine Begründung für dieses Verhalten zu finden.

Bei der Betrachtung des kontinuierlichen Koaleszenzmodells werden die turbulenten Prozesse innerhalb der Wolke nicht berücksichtigt. Deshalb erfolgte die Betrachtung eines stochastischen Koaleszenzmodells. Dabei werden die beteiligten Tropfen zufällig ausgewählt. Allerdings kann auch hier das typische Koaleszenzverhalten nicht beobachtet werden. Aus zwei kleinen Tropfen entsteht nur ein großer. So kommt es zur Abnahme des ersten Maximums, ohne das ein deutliches Maximum bei großen Tropfen entsteht, da der große Tropfen bei Beteiligung am Kollisionsprozess ebenfalls verschwindet. Auch an dieser Stelle müssen noch Lösungsmöglichkeiten gefunden werden, die das Problem in den Griff bekommen.

Zum Schluss erfolgte noch die Kombination von Tropfenwachstum durch Kondensation und Koaleszenz, da erst so die mikrophysikalischen Prozesse innerhalb der Wolke komplett wiedergegeben werden. Diesmal zeigt die Tropfengrößenverteilung eine schnelle Zunahme der großen Tropfen. So erfolgt anfangs über eine Verbreiterung des Tropfenspektrums die Bildung eines zweiten Maximums. Diese bimodale Verteilung löst sich schon innerhalb der ersten paar Minuten auf und es erfolgt im Wesentlichen eine Verlagerung der kompletten Verteilung zu größeren Radien. Bei einer Variation der Umgebungsparameter wird diesmal der stärkste Einfluss von dem Aufwind ausgeübt. Da dieser in die Berechnung der Koagulationseffizienz eingeht und damit die Wahrscheinlichkeit für eine Kollision zweier Tropfen miteinander erhöht wird. Beide anderen Umgebungsparameter zeigen die gleichen Verhaltensmuster wie bei reinem Kondensationswachstum.

Die mikrophysikalischen Prozesse, die innerhalb einer Wolke zum Wachstum der Tropfen führen, werden hier alle dargestellt. Um nun allerdings ein komplettes Wolkenmodell des Tropfenwachstums zu erhalten, ist im nächsten Schritt die Aufspaltung auf mehreren Höhenlevels nötig. D.h. für jede Schicht wird separat die Entwicklung der Tropfen betrachtet und nach jedem Zeitschritt erfolgt eine Einordnung des Tropfens entsprechend seiner aktuellen Höhe. Insgesamt kann dann der Weg eines Tropfens durch die Wolke verfolgt werden. Für die Betrachtung aller mikrophysikalischen Prozesse ist die Simulation des Zerplatzens von Tropfen noch zusätzlich nötig. Dabei entstehen aus einem großen Tropfen wieder mindestens zwei kleine, denen wiederum verschiedene Entwicklungsmöglichkeiten offen stehen. Die Aufenthaltsdauer des Tropfens in der Wolke wird somit verlängert. Außerdem muss bei diesem Modell immer noch der Aufwind von außen

vorgegeben werden. Somit ist eine zusätzliche Erweiterung die Simulation des Windes innerhalb des Modells. Dann kann sich ein anfänglich vorhandenes Tropfenspektrum selbstständig bei einem vorgegebenen Profil der Atmosphäre entwickeln.

Literaturverzeichnis

- Bartlett, J. T., 1966. The growth of cloud droplets by coalescence. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 92, 93–104.
- Bayewitz, Marvin H., Y. J. K. S. und Shinnar, R., 1974. The Extent of Correlations in a Stochastic Coalescence Process. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 31(6), 1604–1614.
- Beard, K. und Ochs, H. T., 1984. Collection and coalescence efficiencies for accretion. *Journal of Geophysical Research*, 89, 7165–7169.
- Beard, K. und Pruppacher, H., 1971. A Wind Tunnel Investigation of the Rate of Evaporation of Small Water Drops Falling at Terminal Velocity in Air. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 28(8), 1455–1464.
- Berry, E. X., 1967. Cloud Droplet Growth by Collection. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 24, 688–701.
- Berry, E. X. und Reinhard, R. L., 1974. An Analysis of Cloud Drop Growth by Collection: Part I. Double Distribution. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 31(7), 1814–1824.
- Brenguier, J. L., 1990. Parametrization of the Condensation Process: A Theoretical Approach. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 48(2), 264–282.
- Briscoe, B. J. und Galvin, K. P., 1991. Growth with coalescence during condensation. *Phys. Rev.*, 43, 1906–1918.
- Chin, E. H. C. und Neiburger, M., 1972. A Numerical Simulation of the Gravitational Coagulation Process for Cloud Droplets. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 29(4), 718–727.
- Drake, R. L., 1972. The Scalar Transport Equation of Coalescence Theory: Moments and Kernels. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 29(3), 537–547.
- Drake, R. L. und Wright, T. J., 1972. The Scalar Transport Equation of Coalescence Theory: New Families of Exact Solutions. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 29(3), 548–556.
- DWD, 1987. *Leitfäden ...*, Nr.1: *Allgemeine Meteorologie*. Deutscher Wetterdienst, Offenbach.

- Eppel, D. P., Kapitzka, H., Claussen, M., Jacob, D., Koch, W., Levkov, L., Mengelkamp, H. T., und Werrmann, N., 1995. The Non-Hydrostatic Mesoscale Model GESIMA. Part II: Parametrizations and Applications. *Beiträge zur Physik der Atmosphäre*, 68(1), 15–41.
- Gillespie, D. T., 1972. The Stochastic Coalescence Model for Cloud Droplet Growth. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 29(8), 1496–1510.
- Gillespie, D. T., 1975. An Exact Method for Numerically Simulating the Stochastic Coalescence Process in a Cloud. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 32(10), 1977–1989.
- Hall, W. D. und Pruppacher, H. R., 1976. The Survival of Ice Particles Falling from Cirrus Clouds in Subsaturated Air. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 33(10), 1995–2006.
- Hänel, G., 1970. Die Größe atmosphärischer Aerosolteilchen als Funktion der relativen Luftfeuchtigkeit. *Beiträge zur Physik der Atmosphäre*, 43, 119–132.
- Hänel, G., 1977. Humidity Effects on Gravitational Settling and Brownian Diffusion of Atmospheric Aerosol Particles. *Pure and Applied Geophysics*, 115(4), 775–797.
- Hänel, G., 1987. The Role of Aerosol Properties During the Condensational Stage of Cloud: A Reinvestigation of Numerics and Microphysics. *Beiträge zur Physik der Atmosphäre*, 60(3), 321–339.
- Hänel, G. und Thudium, J., 1977. Mean Bulk Densities of Samples of Dry Atmospheric Aerosol Particles: A Summary of Measured Data. *Pure and Applied Geophysics*, 115(4), 799–803.
- Klett, J. D. und Davis, M. H., 1973. Theoretical Collision Efficiencies of Cloud Droplets at Small Reynolds Numbers. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 30(1), 107–117.
- Köhler, H., 1921. Zur Kondensation des Wasserdampfes in der Atmosphäre. *Geofysiske Publication*, 2, 3–15.
- Korolev, Alexei, V., 1995. The Influence of Supersaturation Fluctuations on Droplet Size Spectra Formation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 52(20), 3620–3634.
- Liljequist, G. und Cihak, K., 1994. *Allgemeine Meteorologie*. Vieweg.
- Long, A. B., 1968. Validity of the Finite-Difference Droplet Collection Equation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 28(2), 210–218.
- Mason, B. J., 1971. *The Physics of Clouds*. Oxford University Press.
- Maxerath, G., 1984. *Ein zweidimensionales Wolkenmodell mit detaillierter Behandlung der Mikrophysik des Flüssigwassers*. Doktorarbeit, Universität Köln.
- Mordy, W., 1959. Computations of the Growth by Condensation of a Population of Cloud Droplets. *Tellus*, 6, 16–44.

- Murray, F., 1967. On the computation of saturation vapor pressure. *J. Appl. Meteor.*, 6, 203–204.
- Pruppacher, H. R. und Klett, J. D., 1997. *Microphysics of Clouds and Precipitation*. Kluwer Academic Publishers.
- Rogers, R. und Yau, M., 1989. *A short course in Cloud Physics*. Pergamon Press.
- Ryan, B., 1974. Growth of Drops by Coalescence: The Effect of Different Collection Kernels and of Additional Growth by Condensation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 31(7), 1942–1948.
- Scott, W. T., 1967. Poisson Statistics in Distributions of Coalescing Droplets. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 24(2), 221–225.
- Scott, W. T., 1968. On the Connection Between the Telford and Kinetic-Equation Approaches to Droplet Coalescence Theory. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 25(5), 871–873.
- Slinn, W. G. N. und Gibbs, A. G., 1971. The Stochastic Growth of a Rain Droplet. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 28(6), 973–982.
- Srivastava, R. C., 1989. Growth of Cloud Drops by Condensation: A Criticism of Currently Accepted Theory and a New Approach. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 46(7), 869–887.
- Telford, J., 1955. A new aspect of coalescence theory. *Journal of Meteorology*, 12, 436–444.
- Twomey, S., 1964. Statistical effects in the Evolution of a Distribution of Cloud Droplets by Coalescence. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 21, 553–557.
- Twomey, S., 1965. Computations of Rain Formation by Coalescence. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 23(4), 405–411.
- Valioulis, I. A. und List, J. E., 1984. A Numerical Evaluation of the Stochastic Completeness of the Kinetic Coagulation Equation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 41(16), 2516–2530.
- von Storch, F. W. und Zwiers, H., 1997. *Statistical Analysis in Climate Research*. Cambridge University Press.
- Wacker, U., 1993. Diffusionswachstum von Wolkentropfen. *PROMET– Meteorologische Fortbildung*, 1/2, Deutscher Wetterdienst, Offenbach, Seiten 15–21.
- Warshaw, M., 1967. Cloud Droplet Coalescence: Statistical Foundations and a One-Dimensional Sedimentation Model. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 24, 278–286.
- Warshaw, M., 1968. Cloud-Droplet Coalescence: Effects of the Davis-Sartor Collision Efficiency. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 25, 874–877.

Danksagung

Herrn Prof. Dr. Andreas Macke danke ich für die Betreuung der Arbeit

Weiter bedanke ich mich bei allen, die mich auf meinem Weg durch das Studium begleitet haben.

Bei meinen Eltern bedanke ich mich, dass sie mir das Studium ermöglicht und mich stets unterstützt haben.

Die Arbeit wurde mit der Textverarbeitung L^AT_EX angefertigt.

Erklärung

Hiermit bestätige ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Ich versichere, dass diese Arbeit noch nicht zur Erlangung eines Diplomgrades an anderer Stelle vorgelegen hat.

Kiel, Juli 2005

(Catrin Lehmann)